CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

COLEGIADO DE MATEMÁTICA

Licenciatura em Matemática

Unioeste – *Campus* de Cascavel

ANA ALICE DE SOUZA

MEIRIELLY FERNANDES DE LIMA

MILENA MACIEL ROMÃO

STEPHANY AMANDA PARTEKA

RELATÓRIO DAS ATIVIDADES DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO II

PROMAT

CASCAVEL

2024

ANA ALICE DE SOUZA
MEIRIELLY FERNANDES DE LIMA
MILENA MACIEL ROMÃO
STEPHANY AMANDA PARTEKA

METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO II

PROMAT

Relatório apresentado como requisito parcial para aprovação na disciplina.

Orientadora: Pamela Gonçalves.

CASCAVEL

2024

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

Sumário

1. **Introdução**

O presente trabalho, trata sobre o desenvolvimento do projeto de extensão Promat (Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas), sendo este realizado durante o Estágio Supervisionado do Curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado II, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná.

Neste trabalho, está contido como foi desenvolvido o Promat, desde o cronograma com os conteúdos aplicados em cada encontro, os planos de aula, abordando as metodologias, até os relatórios, em que estão descritos como ocorreu o desenvolvimento de cada aula e nosso ponto de vista sobre o encontro.

O projeto foi aplicado em 10 encontros aos sábados de manhã, no período de 02 de março de 2024 a 11 de maio de 2024, exceto o dia 30 de março de 2024, por ser recesso no calendário acadêmico. Durante este período obtivemos muitos aprendizados e desafios, aprimorando cada vez mais a nossa prática docente.

2. **Promat**

O Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas – Promat é desenvolvido na Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste, no Campus de Cascavel. Nele, são disponibilizados conteúdos de Matemática da Educação Básica, especialmente aqueles exigidos no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM e em outros exames seletivos como vestibulares, sendo como “curso preparatório de Matemática”. O objetivo principal é reforçar conceitos matemáticos fundamentais que possam não ter sido completamente compreendidos durante o período escolar.

O projeto foi idealizado com o intuito de promover ações para auxiliar os estudantes ao acesso à universidade, assim como um meio que busca manter a permanência na Unioeste os acadêmicos de cursos de graduação do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas – CCET da instituição, especialmente os acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática. Consta de duas fases: a primeira está relacionada à disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática – Estágio Supervisionado I do curso de Matemática, que tem como foco os conteúdos do Ensino Fundamental II, enquanto a segunda relaciona-se à disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática – Estágio Supervisionado II, com a abordagem de conteúdos do Ensino Médio.

O presente relatório diz respeito a uma edição da segunda fase, voltada para os alunos do Ensino Médio, bem como para os acadêmicos matriculados em um dos cursos de graduação do CCET, em um formato de “curso de nivelamento” em disciplinas básicas presentes nesses cursos.

As aulas são conduzidas por estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática, supervisionados e orientados pelos professores do Colegiado do referido curso. Essas aulas ocorrem aos sábados pela manhã, com um total de dez encontros de quatro horas cada. Ao final do projeto, os alunos são contemplados com um certificado condicionado a frequência, sendo que se necessita de um percentual maior que 75% para obter tal certificação.

3. **Cronograma**

Quadro 1 – Cronograma dos encontros

Encontro	Data	Conteúdos
1	02/03/2024	Análise combinatória.
2	09/03/2024	Probabilidade.
3	16/03/2024	Matrizes e determinantes.
4	23/03/2024	Sistemas lineares.
5	06/04/2024	Geometria analítica.
6	13/04/2024	Geometria analítica
7	20/04/2024	Trigonometria.
8	27/04/2024	Trigonometria.
9	04/05/2024	Funções trigonométricas.
10	11/05/2024	Dinâmicas e confraternização.

Fonte: Elaborado pelas autoras

4. Encontro 1

4.1 Plano de aula

Plano de aula – Encontro 1 – 02/03/2024

Público-alvo: Alunos inscritos no projeto de ensino e extensão Promat.

Conteúdo: Análise combinatória.

Objetivo geral: Compreender os conceitos que envolvem a análise combinatória e desenvolver estratégias de cálculo nos exercícios propostos.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com o conteúdo indicado acima, espera-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando a contagem das possibilidades;
- Conhecer o Princípio Fundamental da Contagem;
- Diferenciar permutação, arranjo e combinação;
- Resolver problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não ordenáveis de elementos.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Lousa, giz, caderno, lápis, borracha, celular, cartelas e atividades impressas.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos o encontro recepcionando os alunos e nos apresentando para a turma dizendo nome, idade, ano do curso e porque escolhemos fazer Matemática. Também daremos algumas instruções sobre o funcionamento do Promat incluindo duração, conteúdos a serem trabalhados e requisitos para a obtenção do certificado. Em seguida, para que todos possam se conhecer melhor e tornar esse primeiro contato mais acolhedor, iremos propor uma dinâmica de apresentação conhecida como troca de papéis.

(10 minutos)

<u>Dinâmica ‘’Troca de papéis’’</u>

Os alunos serão divididos em duplas e terão alguns minutos para interagir entre si. Ao final desse tempo, será solicitado que cada integrante da dupla apresente seu colega, descrevendo o máximo de características que conseguir lembrar.

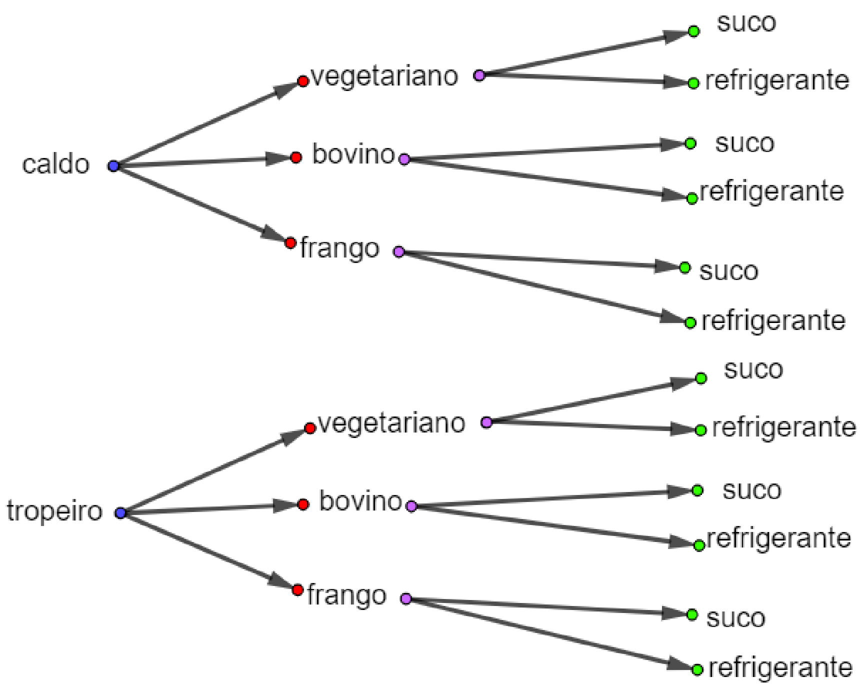
(20 minutos)

Posteriormente, vamos apresentar e definir o Princípio Fundamental da Contagem a partir de um exercício introdutório. Dessa forma, solicitaremos aos alunos que analisem e resolvam o seguinte problema:

Problema 1: Em um restaurante, é oferecido o famoso prato feito (PF). Todos os pratos possuem arroz, e o cliente pode escolher uma combinação entre 2 tipos de feijão (caldo ou tropeiro), 3 possibilidades de carne (bovina, de frango ou vegetariana), e 2 tipos de bebida (suco ou refrigerante). De quantas maneiras distintas um cliente pode fazer o pedido?

Como forma de resolução, indicaremos todas as possibilidades de PF por meio do esquema abaixo:

Figura 1 – Esquema das possibilidades



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/fatorial-principio-fundamental-da-contagem.htm

Destacaremos que o processo de descrever todas as possibilidades pode ser maçante para problemas que possuem mais características a ser consideradas. Sendo assim, multiplicar a quantidade de cada componente é uma forma mais fácil e prática para resolver problemas como esse.

$$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12\ possibilidades$$

(15 minutos)

Assim, apresentaremos a <u>definição formal do Princípio Fundamental da Contagem:</u>

''O princípio fundamental da contagem é uma técnica para calcularmos de quantas maneiras decisões podem combinar-se. Se uma decisão pode ser tomada de n maneiras e outra decisão pode ser tomada de m maneiras, o número de maneiras que essas decisões podem ser tomadas simultaneamente é calculado pelo produto de $n \,.\, m$''.

Nesse momento, também explicaremos que os problemas envolvidos na análise combinatória são problemas que envolvem contagem, isto é, analisar e determinar as combinações possíveis em um conjunto de dados. Dentre os principais tipos de agrupamentos temos o arranjo, a combinação e a permutação.

(10 minutos)

Dando sequência a aula, dividiremos os alunos em grupos de quatro pessoas para a realização de um jogo conhecido como ''Jogo da senha digital'' acessando o link: https://www.geogebra.org/m/rjyuwp2j. Caso os discentes não tenham acesso à internet, o jogo pode ser realizado sem a plataforma apenas com algumas adaptações (Anexo 1).

<u>''Jogo da senha digital''</u>

O jogo se baseia em acertar a combinação de uma senha composta por quatro círculos, considerando que para cada círculo existem 6 cores disponíveis. A plataforma é bastante visual e de fácil entendimento. A cada rodada você recebe ''dicas'' de acordo com seu palpite anterior, como por exemplo: cor certa no lugar certo, cor certa no lugar errado e cor não pertence a senha. A partir das dicas fornecidas pelo jogo você deve construir um raciocínio de modo a acertar a senha antes do limite de dez tentativas.

Para deixar a dinâmica mais interessante vamos oferecer brindes aos alunos que acertarem a senha mais rapidamente, questionando-os sobre a lógica utilizada.

A partir do jogo, solicitaremos que os alunos respondam algumas questões, sendo elas:

Questão 1:

Quantas cores, no mínimo, você pode acertar na primeira tentativa, independentemente da posição estar correta ou não? Justifique.

2 cores.

Questão 2:

De quantas tentativas você precisa para descobrir todas as cores da senha? Justifique.

Na pior das hipóteses de 3 tentativas.

A pior das hipóteses é o caso que você acerta 3 das cores e erra uma. Assim restam para você duas possibilidades de substituir a cor errada, podendo errar novamente na segunda rodada.

Questão 3:

De quantas maneiras você pode escolher as quatro cores inicialmente para fazer sua tentativa considerando a ordem e desconsiderando a ordem? Justifique.

Considerando a ordem: $6\,.\,5\,.\,4\,.\,3 = 360$ maneiras.

Desconsiderando a ordem: $\frac{360}{4\,.\,3\,.\,2\,.\,1} = \frac{360}{24} = 15$ maneiras.

Questão 4:

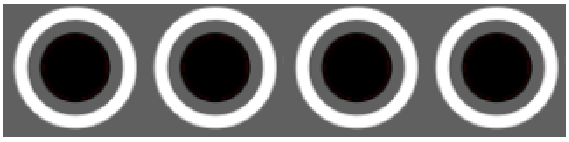
Se você inicialmente fosse convencido de que o terceiro círculo é amarelo. Quantas seriam as possíveis configurações de senha?

$5\,.\,4\,.\,1\,.\,3 = 60$ possíveis configurações de senha.

Questão 5:

Sabendo que a primeira análise foi:

Figura 2 – Jogo da senha questão 5

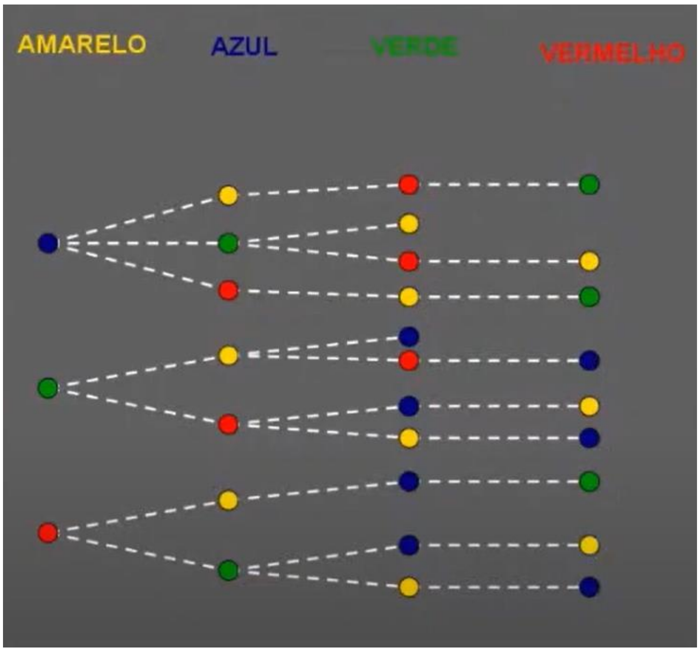


Fonte: Elaborado pelas autoras

Qual o número possível de senhas para a segunda rodada?

9 possíveis senhas.

Figura 3 – Resolução questão 5



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=TvSGkc-s-Tg&t=1206s

Em caso de falta de tempo, escolheremos as questões a serem trabalhadas. Após 15 minutos, corrigiremos as perguntas com participação da turma. O objetivo dessa atividade é abordar a análise combinatória de forma prática e interativa, a fim de despertar o interesse dos alunos e estimular o raciocínio lógico.

(70 minutos)

Na sequência, entregaremos para cada um dos alunos uma lista de exercícios sobre permutação, arranjo e combinação (Anexo 2). Para resolver as questões os alunos podem permanecer em grupos ou trabalhar individualmente.

As quatro primeiras questões serão realizadas coletivamente a fim de apresentar os conceitos, diferenças e fórmulas.

Permutação: é o agrupamento ordenado de todos os elementos de um conjunto. A permutação é calculada quando todos os elementos do conjunto são utilizados e a ordem é importante.

$$\boldsymbol{P_n = n!}$$

Arranjo: é uma permutação parcial, ou seja, uma seleção de objetos em que a ordem é importante. É utilizado quando é necessário escolher um número específico de elementos de um conjunto e organizá-los em uma ordem específica.

$$\boldsymbol{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Combinação: é utilizado quando é necessário escolher um número específico de elementos de um conjunto, mas a ordem não importa. Isto é, é um agrupamento não ordenado.

$$\boldsymbol{C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}}$$

(40 minutos)

Depois, deixaremos os estudantes livres para resolverem os demais problemas. Enquanto isso, circularemos pela sala tirando dúvidas. De forma estratégica, algumas questões serão corrigidas durante o encontro e outras ficarão como tarefa de casa.

(50 minutos)

Avaliação: A avaliação ocorrerá ao longo do encontro acompanhando a participação e interação dos alunos durante a dinâmica de apresentação, o jogo da senha e o desenvolvimento das atividades propostas.

Referências bibliográficas:

ASTH, Rafael Cardoso. Exercícios de permutação (resolvidos e explicados). **Toda Matéria.** Disponível em: https://www.todamateria.com.br/exercicios-de-permutacao/. Acesso em: 24 fev. 2024.

MARTARELLI, Luzia da Costa Tonon. Atividades com o JOGO DA SENHA DIGITAL - PARTE 1. **YouTube** (5 min e 40s), 06 abr. 2020. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=_vnR6Zs_TF8&t=4s. Acesso em: 24 fev. 2024.

MARTARELLI, Luzia da Costa Tonon. JOGO DA SENHA DIGITAL (INÉDITO!) - QUESTIONÁRIO DO ALUNO. **YouTube** (23 min e 07 s), 10 set. 2021. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=TvSGkc-s-Tg&t=1206s. Acesso em: 24 fev. 2024.

OLIVEIRA, Gabriel Alessandro de. Exercícios sobre Arranjo ou Combinação. **Brasil Escola**. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-arranjo-ou-combinacao.htm. Acesso em: 24 fev. 2024.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. Princípio fundamental da contagem. **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/fatorial-principio-fundamental-da-contagem.htm. Acesso em: 18 fev. 2024.

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DE CONTAGEM: GENERALIZAÇÃO. **Clubes de Matemática da OBMEP**. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/texto_006-principio-fundamental-de-contagem/principio-fundamental-de-contagem-generalizacao/. Acesso em: 18 fev. 2024.

Anexos

Anexo 1

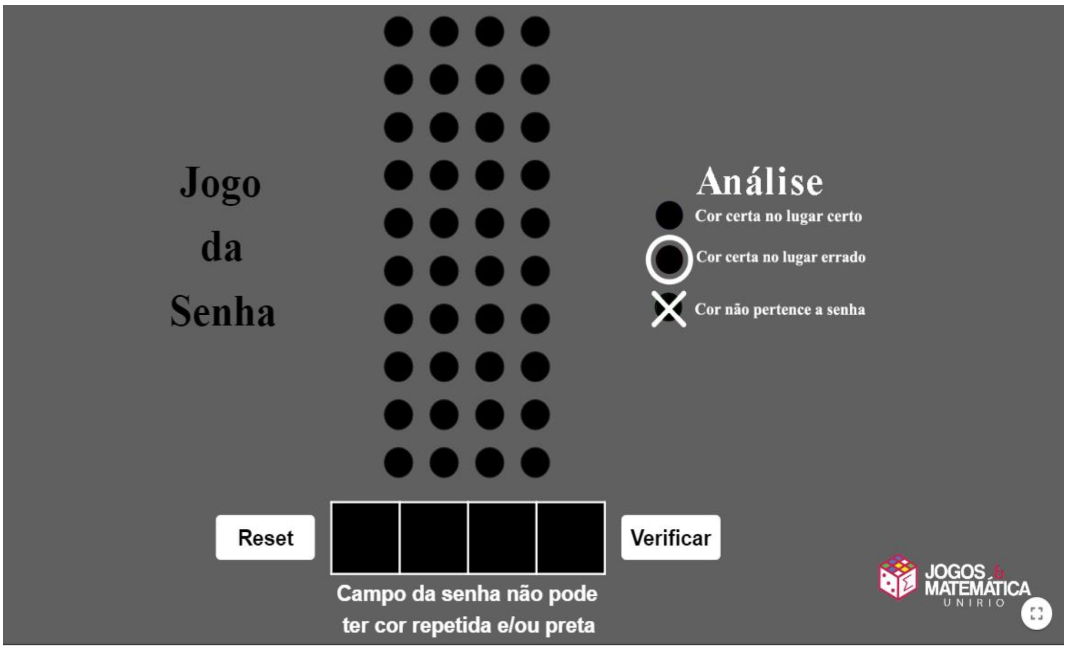
Figura 4 – Mini tabuleiro jogo da senha

Fonte: https://www.jogosematematica.com.br/jogos/jogo-da-senha

Figura 5 – Tabuleiro jogo da senha

Fonte: https://www.jogosematematica.com.br/jogos/jogo-da-senha

Figura 6 – Jogo da senha virtual



Fonte: https://www.geogebra.org/m/rjyuwp2j

Anexo 2

Lista de exercícios

1. Dois amigos estavam brincando de lançar dados de seis faces. Sabe-se que saíram os números 4, 1, 2 e 5, não necessariamente nesta ordem. Quantas sequências de resultados poderiam ter acontecido?

Algumas ordenações de resultados poderiam ser:

1, 2, 4 e 5 ou

5, 4, 5 e 1 ou

4, 5, 1 e 2

Para determinar o número total de ordenações possíveis, calculamos uma permutação com quatro elementos distintos.

$$P_4 = 4! = 4\,.\,3\,.2\,.\,1 = 24$$

2. Em época de eleição para o grêmio estudantil do colégio, tiveram 12 candidatos aos cargos de presidente, vice-presidente e secretário. De quantos modos diferentes estes candidatos poderão ocupar as vagas deste grêmio?

Cada combinação é diferente da outra neste caso, existe diferenciação entre o Candidato A ser presidente e o Candidato B ser vice-presidente, com a possibilidade de B ser presidente e A ser vice. Por isso usaremos Arranjo**.**

$$A_{12,3} = \frac{12!}{(12-3)!} = 12\,.\,11\,.\,10 = 1320\; possibilidades.$$

3. Júlia deseja viajar e levar 5 pares de sapatos, sabendo que ela possui em seu guarda-roupa 12 pares, de quantas maneiras diferentes Júlia poderá escolher 5 pares de sapatos para a sua viagem?

Se Júlia leva o sapato preto e o sapato rosa, é a mesma coisa que ela levar o sapato rosa e o sapato preto, logo, a sequência dos elementos não importa, com isso usaremos Combinação, para eliminarmos os arranjos repetidos.

$$C_{12,5} = \frac{12!}{(12-5)!\,5!} = \frac{12\,.\,11\,.\,10\,.\,9\,.\,8}{5\,.\,4\,.3\,.2\,.\,1} = 792\; combinações.$$

4. (Enem) Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas por meio de:

A) uma combinação e um arranjo, respectivamente.

B) um arranjo e uma combinação, respectivamente.

C) um arranjo e uma permutação, respectivamente.

D) duas combinações.

E) dois arranjos.

Alternativa A.

Para saber qual o tipo de agrupamento a que o problema está se referindo, basta analisar se a ordem é importante ou não.

No primeiro agrupamento, serão sorteados 4 times entre os 12 para compor o Grupo A. Note que a ordem em que um time é sorteado não é relevante, desde que ele esteja entre os 4 sorteados, então, trata-se de uma combinação.

Já na segunda escolha, dos 4 times serão sorteados 2, só que o primeiro sorteado jogará em casa, logo, a ordem é importante, o que faz com que esse agrupamento seja calculado por um arranjo.

Assim, temos, respectivamente, uma combinação e um arranjo.

5. Um grupo de seis amigos foi assistir um filme no cinema e compraram seus ingressos para uma mesma fileira de cadeiras. Considerando haver um casal e que eles se sentaram em cadeiras vizinhas, de quantas formas esses amigos puderam se ajustar na fileira de cadeiras?

Como todos os elementos do conjunto "amigos" são considerados no cálculo, trata-se de um problema de permutação.

Para o cálculo do número total possível de permutações, consideramos 5 elementos, pois o casal deve estar sempre junto.

$$P_5 = 5! = 5\,.\,4\,.\,3\,.2\,.\,1 = 120$$

Ainda, destas 120 possibilidades, devemos multiplicar por dois, pois o casal pode trocar de lugar entre si.

Assim, a quantidade de maneiras possíveis dos amigos se organizarem na fileira de cadeiras é:

120 . 2 = 240.

6. Um fotógrafo está ajustando sua câmera para fotografar 5 crianças dispostas em um banco. Neste grupo há 3 meninas e 2 meninos. Uma possível arrumação das crianças para a foto seria: menina, menino, menina, menino, menina. Considerando as posições nas quais as crianças podem se sentar no banco, de quantas formas o fotógrafo pode organizar os meninos e as meninas, obtendo fotos diferentes?

Este é um caso de permutação com elementos repetidos. Devemos dividir o número total de permutações pelo produto entre as permutações dos elementos que se repetem.

Assim, $\frac{P_5}{elemento\ repetidos} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5\,.4}{2\,.1} = \frac{20}{2} = 10$ formas.

7. Quantos anagramas podem ser feitos com as letras da palavra PREFEITURA?

A palavra PREFEITURA possui 10 letras, sendo que algumas se repetem. A letra E aparece duas vezes, assim como o R.

Calculamos a divisão entre a permutação de 10 elementos e dividimos pelo produto das permutações de elementos repetidos.

$$\frac{P_{10}}{elementos\ repetidos} = \frac{10!}{2!\,2!} = 907\ 200\ anagramas.$$

8. As senhas bancárias são construídas com 4 dígitos. Durante a criação da senha, a gerente da Karla recomendou que ela criasse uma senha com 4 dígitos, todos distintos entre si. Suponha que Karla seguiu a recomendação de sua gerente, assim, o número de senhas distintas que ela pode criar é igual a:

Existem 10 opções possíveis de símbolos. Como em senhas a ordem é importante, e, nesse caso, ela possui dígitos distintos, então, estamos calculando um arranjo de 10 elementos tomados de 4 em 4.

$$A_{10,34} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 10\,.\,9\,.\,8\,.\,7 = 5040 \; senhas\ distintas.$$

9. Por motivos de segurança, Renato decidiu alterar a sua senha das redes sociais. Para que ele não se esqueça de suas senhas, ele sempre escolhe usar três letras do seu nome seguidas do dia e do mês de nascimento. Sabendo que a senha antiga era "ren0203", o total de senhas possíveis que ele pode criar para essa nova senha é:

A senha será formada com 3 letras do nome Renato, logo, será um arranjo de 6 elementos escolhidos de 3 em 3.

$$A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 6\,.\,5\,.\,4 = 120$$

Como a sequência "ren" já foi utilizada, então, 120 – 1 = 119 senhas possíveis.

10. (Enem 2021) Uma pessoa produzirá uma fantasia utilizando como materiais: 2 tipos de tecidos diferentes e 5 tipos distintos de pedras ornamentais. Essa pessoa tem à sua disposição 6 tecidos diferentes e 15 pedras ornamentais distintas. A quantidade de fantasias com materiais diferentes que podem ser produzidas é representada pela expressão:

A) $\frac{6!}{4!\,2!} \cdot \frac{15!}{10!\,5!}$

B) $\frac{6!}{4!\,2!} + \frac{15!}{10!\,5!}$

C) $\frac{6!}{2!} + \frac{15!}{5!}$

D)) $\frac{6!}{2!} \cdot \frac{15!}{5!}$

E) $\frac{21!}{7!\,14!}$

Alternativa A.

Há duas combinações para serem calculadas, uma calculará o número de maneiras distintas que o tecido pode ser escolhido, uma combinação de 6 elementos tomados de 2 em 2; já a outra é a combinação de 15 elementos tomados de 5 em 5, que nos dá o número de maneiras distintas que as pedras podem ser escolhidas. Dessa forma, temos que:

$$C_{6,4} \, . \, C_{15,5} = \frac{6!}{4!\,2!} \cdot \frac{15!}{10!\,5!}$$

4.2 **Relatório**

Relatório – 02/03/2024

No dia dois de março de 2024, às 8h10 da manhã, realizamos o primeiro encontro do Promat na sala A221, com 30 alunos.

Inicialmente nos apresentamos, nesta aula tínhamos um colega do terceiro ano do curso realizando o Promat conosco.

Posteriormente, repassamos algumas informações importantes sobre o Promat, como: horário e conteúdo das aulas, quantidade de encontros, necessidade de ter 75% de presença para garantir o certificado e que alunos menores de idade deveriam evitar sair da aula para “passear” sem a permissão dos pais, pois estão sobre a nossa responsabilidade no período de aula.

Em seguida explicamos a dinâmica invertendo os papéis, a qual decorreria da seguinte forma: formando duplas, os alunos conversariam entre si por alguns momentos buscando conhecer sua dupla; em seguida, cada um deveria apresentar o seu par para o resto da turma, comentando sobre o que aprendeu na conversa. Como alguns alunos preferiram não formar duplas, formou-se também um trio. Durante as apresentações, vários alunos apresentaram seus animais de estimação. Percebemos que havia várias alunas de cidades vizinhas, como Santa Tereza e Guaraniaçu. Entre os alunos da turma, havia um aluno com Transtorno do Espectro Autista (TEA), o qual demonstrou ser bastante interessado, introspectivo e rápido nas resoluções.

Após as apresentações, iniciamos o conteúdo com um exercício introdutório. Enquanto uma estagiária foi escrevendo o exercício no quadro, outra realizou a leitura do exercício, questionando os alunos sobre quantas seriam as possibilidades de prato feito e rapidamente o aluno que é autista respondeu corretamente, e ao nosso pedido, ele explicou o seu raciocínio. Em seguida ele questionou quando que surgiu a análise combinatória, inicialmente não nos recordávamos, depois o estagiário comentou sobre o problema das "sete pontes *konigsberg*", estudado por Euler que possivelmente teria dado início ao conteúdo. Através de pesquisas, foi possível constatar que este problema não tem relação direta com a origem da análise combinatória, mas já usava a ideia de forma intuitiva.

Posteriormente, passamos o conceito do Princípio Fundamental da Contagem no quadro e o explicamos.

Em seguida, explicamos jogo da senha e copiamos o *link* do jogo no quadro, para que os alunos que tivessem acesso à *internet* pudessem acessar e, para aqueles que não tinham acesso, foi disponibilizado o jogo impresso, o qual teriam que formar dupla para jogar. Disponibilizamos um tempo para os alunos jogarem e ao final questionamos quantas jogadas foram necessárias para acertarem a senha. A maioria precisou de 3 a 4 tentativas. Como até o momento ninguém havia acertado de primeira, todos os alunos que acertaram na segunda tentativa, ganharam um pirulito como premiação.

Depois, entregamos um questionário sobre o jogo, auxiliamos os alunos a responderem até o momento do intervalo. Em tal questionário, percebemos certa dificuldade na compreensão dos alunos com relação ao objetivo da questão, mas que, uma vez explicada, normalmente conseguiam avançar. Nota-se também que a questão 5 do questionário se mostrou mais complexa do que o planejado, e requisitava um grafo de árvore de todos os casos para solucionar; fato esse que os estagiários só perceberam ao notar que suas resoluções estavam diferentes da oferecida pela fonte do problema.

Ao retornar, iniciamos com a correção do questionário, solicitando a participação dos alunos na leitura e resolução das questões, e explicamos os raciocínios utilizados para responder cada uma.

Em seguida, explicamos que existem três formas de resolver problemas relacionados a análise combinatória, sendo elas: combinação, arranjo e permutação.

Com a ajuda de um fluxograma, explicamos o uso e informações relevantes de cada uma das três fórmulas. Dando sequência à explicação, informamos que entregaríamos uma lista de exercícios e que os quatro primeiros seriam realizados no quadro.

Enquanto uma estagiária concluía o esquema, outra iniciou a resolução do primeiro exercício com o auxílio dos alunos na leitura e na extração dos dados do exercício. E assim persistiu nos próximos três problemas resolvidos em sala com outras estagiárias. Finalmente, deixamos os alunos resolverem o restante dos exercícios até final da aula. Enquanto isso, os estagiários circularam pela sala, auxiliando os alunos a sanar suas dúvidas.

Concluímos, que a turma tem diferentes níveis de habilidades de compreensão sobre o conteúdo, mas trata-se de uma turma bastante interessada e participativa.

5. Encontro 2

5.1 Plano de aula

Plano de aula – Encontro 2 – 09/03/2024

Público-alvo: Alunos inscritos no projeto de ensino e extensão Promat.

Conteúdo: Probabilidade.

Objetivo geral: Compreender os conceitos que envolvem a probabilidade e desenvolver estratégias de cálculo nos exercícios propostos.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com o conteúdo indicado acima, espera-se que o aluno seja capaz de:

- Calcular a probabilidade de um evento isolado;
- Calcular a probabilidade da união e interseção de eventos;
- Conhecer e diferenciar eventos dependentes e independentes;
- Determinar a probabilidade de um evento condicionado a outro.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Lousa, giz, cartelas, dados e atividades impressas.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos o encontro tirando dúvidas a respeito dos exercícios da lista entregue na aula anterior. Na sequência, dividiremos os alunos em grupos de quatro integrantes e entregaremos uma cartela para cada grupo, a fim de realizar a dinâmica “corrida dos cavalos” (Apêndice). Para iniciar a dinâmica, cada aluno deve escolher dois cavalos para “apostar”, de modo que cada número na cartela equivale a um cavalo, e jogar dois dados ao mesmo tempo. O nome ou a inicial dos alunos deve ser registrado abaixo do número do cavalo escolhido. O aluno avança se a soma dos números tirados nos dois dados for equivalente ao número do cavalo apostado. Vence quem atingir a linha de chegada primeiro. *(estimativa 20 minutos)*

Logo após, entregaremos uma atividade com perguntas sobre a dinâmica para os grupos responderem (Anexo 1). A partir da atividade, analisaremos coletivamente os resultados obtidos na dinâmica a fim de definir probabilidade. Após a resolução dos alunos, corrigiremos as questões com a participação da turma. No exercício 4 introduziremos também a probabilidade da união e interseção de eventos. *(estimativa 55 minutos)*

Após esse momento, forneceremos uma lista de definições sobre o conteúdo por meio de material (Anexo 2) impresso e comentaremos sobre cada uma delas.

Experimento aleatório

Chamamos de experimentos aleatórios aqueles que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados diferentes. Embora não saibamos qual o resultado que irá ocorrer num experimento, em geral, conseguimos descrever o conjunto de todos os resultados possíveis que podem ocorrer.

Citaremos alguns exemplos para melhor entendimento:

- Lançar uma moeda e observar a face de cima;
- Lançar um dado e observar o número da face de cima;
- De uma urna contendo 3 bolas vermelhas e 2 bolas brancas, selecionar uma bola e observar sua cor;
- De um baralho de 52 cartas, selecionar uma carta e observar seu naipe.

Espaço amostral

Chamamos de espaço amostral, e indicamos por Ω, um conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplo: A face superior resultante do lançamento de um dado de 6 faces pode ser o número 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Logo, nesse experimento, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Observação: Um espaço amostral é chamado de equiprovável se todos os resultados possuem a mesma chance de acontecerem.

Evento

Consideremos um experimento aleatório, cujo espaço amostral é Ω. Chamamos de evento todo subconjunto de Ω. Em geral indicamos um evento por uma letra maiúscula do alfabeto: A, B, C, ..., X, Y, Z.

Exemplo: Considere o experimento de lançar um dado de 6 faces e observar a face superior. Exemplos de eventos são:

A = Obter um número ímpar.

B = Obter um número par.

C = {1,2} (Obter o número 1 ou o número 2.).

D = {1, 2, 3, 4, 5, 6} (Obter um número de 1 a 6.).

E = {7} (Obter o número 7).

Note que os eventos A, B, C e D são subconjuntos do espaço amostral (o evento D, inclusive, é igual ao espaço amostral). Assim, os eventos A, B e C são eventos possíveis e o evento D é um evento certo, pois com certeza a face obtida será um número de 1 a 6. Já o evento E é chamado de evento impossível, pois não podemos obter o número 7 ao lançar um dado de 6 faces.

Dando continuidade, abordaremos a união e intersecção de eventos:

União de dois eventos

Sejam A e B dois eventos; então $A \cup B$ será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A ou B (ou ambos) ocorrem. Dizemos que $A \cup B$ é a união entre o evento A e o evento B.

No caso da probabilidade da união, estamos avaliando a possibilidade do evento A acontecer **ou** do evento B acontecer. Para isso, a fórmula é construída com soma de probabilidades:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ou seja, a probabilidade da união entre A e B é dada pela probabilidade de acontecer o evento A, mais a probabilidade de acontecer o evento B, subtraída pela probabilidade da **intersecção** (∩) entre os dois conjuntos.

Exemplo: A probabilidade da união de dois eventos, A e B, é igual a 80%. Se a probabilidade de A é igual a 50%, e a probabilidade da intersecção é igual a 15%, então a probabilidade de B vale?

Resolução:

- $P(A \cup B) = 0{,}8$
- $P(A) = 0{,}5$
- $PA \cap B = 0{,}15$

Então temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$0{,}8 = 0{,}5 + P(B) - 0{,}15$$
$$0{,}8 = 0{,}35 + P(B)$$
$$P(B) = 0{,}8 - 0{,}35$$
$$P(B) = 0{,}45.$$

Intersecção de dois eventos

Sejam A e B dois eventos; então A ∩ B será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A e B ocorrerem simultaneamente. Dizemos que A ∩ B é a intersecção entre o evento A e o evento B.

Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral S. A probabilidade de A ∩ B é dada por:

$$\mathrm{P(A \cap B)} = P(B|A)\,.\;P(A),$$

onde

$P(A \cap B)$ → é a probabilidade da ocorrência simultânea de A e B.

$P(A)$ → é a probabilidade de ocorrer o evento A.

$P(B|A)$ → é a probabilidade de ocorrer o evento B sabendo da ocorrência de A.

Se os eventos A e B forem independentes (ou seja, se a ocorrência de um não interferir na probabilidade de ocorrer outro), a fórmula para o cálculo da probabilidade da intersecção será dada por:

$$\mathrm{P(A \cap B)} = \mathrm{P(A)}\,.\;P(B)$$

Vejamos exemplo de aplicação:

Exemplo: em dois lançamentos sucessivos de um mesmo dado, qual a probabilidade de sair um número ímpar e o número 4?

Resolução:

O que determina a utilização da fórmula da intersecção para resolução desse problema é a palavra "**e**" na frase "a probabilidade de sair um número ímpar e o número 4". Lembre-se que na matemática "e" representa intersecção, enquanto "ou" representa a união.

Note que a ocorrência de um dos eventos não interfere na ocorrência do outro. Temos, então, dois eventos independentes. Vamos identificar cada um dos eventos.

Evento A: sair um número ímpar $= \{1, 3, 5\}$.

Evento B: sair o número $4 = \{4\}$.

Espaço Amostral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Temos que:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{6}$.

Assim, teremos:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Posteriormente, apresentaremos a diferença entre eventos independentes e dependentes. Nesse sentido, também explicaremos a probabilidade para eventos complementares. *(estimativa 25 minutos)*

Dando sequência a aula entregaremos uma lista de exercícios (Anexo 3) envolvendo eventos dependentes e independentes e probabilidade condicional. A partir das situações-problema esperamos destacar as diferenças e fixar os conceitos explicados. Enquanto os discentes realizam a tarefa, circularemos pela sala tirando dúvidas. De forma estratégica, corrigiremos as questões no quadro. *(estimativa 80 minutos)*

Ao final da aula, deixaremos um desafio para os alunos: determinar a probabilidade de ganhar na mega utilizando os conceitos vistos em aula e sem olhar a resolução na internet. Se porventura sobrar tempo, efetuaremos a resolução do desafio no encontro. *(estimativa 20 minutos)*

Avaliação: A avaliação ocorrerá ao longo da aula acompanhando a participação e interação dos alunos durante a dinâmica e o desenvolvimento das atividades propostas.

Referências bibliográficas:

ANDRADE, A. L. S. D. **O ensino de probabilidade com alunos do 9º ano do ensino fundamental:** contribuições do jogo “Corrida de Cavalos” na perspectiva da resolução de problemas. TCC – Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Pernambuco. Caruaru, p. 63. 2019.

Exercícios – Probabilidade. **InfoEscola.** Disponível em: https://www.infoescola.com/matematica/probabilidade/exercicios/. Acesso em: 24 fev. 2024.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Combinatória e Probabilidade. 3ª ed. São Paulo: Editora Atual, 1977.

LOPES, Anderson Pinheiro. Probabilidade. **Curso de Formação Continuada da Fundação CECIERJ – Consórcio CEDERJ**, 2014. Disponível em: https://canal.cecierj.edu.br/012016/1d8a14c1d93a25b46ea5451290acf318.pdf. Acesso em: 20 fev 2024.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. Probabilidade no Enem. **PrePara Enem**. Disponível em: https://www.preparaenem.com/enem/probabilidade-no-enem.htm. Acesso em: 24 fev. 2024.

RIGONATTO, Marcelo. Probabilidade de eventos simultâneos. **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/probabilidade-eventos-simultaneos.htm. Acesso em 20 fev. 2024.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. Probabilidade condicional. **Mundo Educação**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/probabilidade-condicional.htm. Acesso em: 24 fev. 2024.

VASCONCELOS, Cleiton Batista; ROCHA, Manoel Americo. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 3ª ed. Fortaleza: EdUECE, 2019.

Apêndices

Quadro 2 – Tabuleiro da corrida de cavalos

CHEGADA													

LARGADA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
APOSTAS/NOMES													

Fonte: Elaborado pelas autoras

Anexos

Anexo 1

Corrida de cavalos atividade

1. **Após o jogo e em grupo, respondam:**

a) Qual cavalo venceu a(s) rodada(s)?

Pessoal

b) Há algum cavalo que tem mais ou menos chance que o outro de vencer? Justifique sua resposta.

Pessoal.

2. **Construam a tabela de possibilidades da soma de dois dados.**

Figura 7 – Soma de dados

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Fonte: Andrade (2019)

3. A partir da tabela construída, o que podemos concluir sobre as possibilidades? Quais são as somas menos e mais prováveis?

Existe uma probabilidade maior ou menor de determinado cavalo vencer. Menos prováveis: 1 e 13. Mais provável: 7.

4. Qual a probabilidade, no lançamento de dois dados, de se obter:

a) Soma igual a 7? $\frac{1}{6}$.

b) Soma igual a 11? $\frac{1}{18}$.

c) Soma par? $\frac{1}{2}$.

d) Soma maior que 9? $\frac{1}{6}$.

e) Soma par e maior que 9? $\frac{1}{9}$.

f) Soma par ou maior que 9? $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

g) Dois números iguais? $\frac{1}{6}$.

Anexo 2

Definições

Experimento aleatório

Chamamos de experimentos aleatórios aqueles que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados diferentes. Embora não saibamos qual o resultado que irá ocorrer num experimento, em geral, conseguimos descrever o conjunto de todos os resultados possíveis que podem ocorrer.

Citaremos alguns exemplos para melhor entendimento:

- Lançar uma moeda e observar a face de cima;
- Lançar um dado e observar o número da face de cima;
- De uma urna contendo 3 bolas vermelhas e 2 bolas brancas, selecionar uma bola e observar sua cor;
- De um baralho de 52 cartas, selecionar uma carta e observar seu naipe.

Espaço amostral

Chamamos de espaço amostral, e indicamos por Ω, um conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Evento

Consideremos um experimento aleatório, cujo espaço amostral é Ω. Chamamos de evento todo subconjunto de Ω. Em geral indicamos um evento por uma letra maiúscula do alfabeto: A, B, C, ..., X, Y, Z.

Eventos independentes

Os eventos independentes são aqueles em que a ocorrência de um evento não interfere na ocorrência de outro evento.

Eventos dependentes

Os eventos dependentes são aqueles em que a ocorrência de um evento interfere na ocorrência de outro.

União de dois eventos

Sejam A e B dois eventos; então $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A ou B (ou ambos) ocorrem. Dizemos que A ∪ B é a união entre o evento A e o evento B.

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} - \mathrm{P(A \cap B)}$$

Intersecção de dois eventos

Sejam A e B dois eventos; então A ∩ B será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A e B ocorrerem simultaneamente. Dizemos que $\mathrm{A \cap B}$ é a intersecção entre o evento A e o evento B.

Em todo caso, $\mathrm{P(A \cap B)} = P(B|A) \,.\, P(A)$

Em especial, se os eventos são independentes, então $\mathrm{P(A \cap B)} = \mathrm{P(A)} \,.\, P(B)$

Probabilidade condicional

A probabilidade condicional é usada quando queremos calcular a chance de determinado evento acontecer, sabendo que outro já ocorreu. Em outros palavras, o cálculo é realizado considerando uma condição, por isso o nome ‘’condicional’’.

Sejam A e B dois eventos dependentes. Sabendo que A já ocorreu, a probabilidade de B condicionada a A é dada por:

$$P(B|A) = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{P(A)}.$$

Anexo 3

Lista de exercícios

1. (Enem 2010 2ª aplicação) Em uma reserva florestal existem 263 espécies de peixes, 122 espécies de mamíferos, 93 espécies de répteis, 1 132 espécies de borboletas e 656 espécies de aves. Se uma espécie animal for capturada ao acaso, qual a probabilidade de ser uma borboleta?

A) 63,31% B) 60,18% C) 56,52% D) 49,96% E) 43,27%

Alternativa D.

Primeiro devemos somar o número dos animais de todas as espécies, $263 + 122 + 93 + 1132 + 656 = 2\,266$ animais, este será o nosso espaço amostra;

Como queremos saber a probabilidade de ser uma borboleta o animal capturado, devemos fazer a razão da quantidade de borboletas pelo espaço amostral: $\frac{1\,132}{2\,266} = 0{,}4995$. Como o dado é em porcentagem, multiplicamos por 100.

2. (Enem 2013) Numa escola com 1 200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas.

Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

A) 1/2

B) 5/8

C) 1/4

D) 5/6

E) 5/14

Os alunos que não falam inglês somam: $300 + 300 = 600$

A probabilidade de um aluno que não fala inglês falar espanhol é: $\frac{300}{600} = \frac{1}{2}$.

3. Um casal pretende ter filhos. Sabe-se que a cada mês a probabilidade da mulher engravidar é de 20%. Qual é a probabilidade dela vir a engravidar somente no quarto mês de tentativas?

P = 0,8 x 0,8 x 0,8 x 0,2 ⟹

P = 0,1024 ⟹

P = 10,24%.

4. Numa urna há 30 bolinhas numeradas de 1 a 30. Serão retiradas dessa urna duas bolinhas, ao acaso, uma após a outra, sem reposição. Qual a probabilidade de sair um múltiplo de 10 na primeira e um número ímpar na segunda?

$$P(A \cap B) = \frac{15}{29} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{58} = 0{,}05172.$$

5. Qual é a probabilidade de extrair uma carta de um baralho comum de 52 cartas e obter um Ás, sabendo que ela é uma carta de copas?

$$P(A|B) = \frac{1}{13} = 0{,}07692.$$

6. (ENEM 2010) O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

Figura 8 – Tamanho dos calçados

TAMANHO DOS CALÇADOS	NÚMERO DE FUNCIONÁRIAS
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Fonte: ENEM (2010)

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0 a probabilidade de ela calçar 38,0 é

A) 1/3 B) 1/5 C) 2/5 D) 5/7 E) 5/14

Alternativa D.

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$.

7. (Enem 2017) Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.

Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

Chover e atrasar <u>OU</u> Não chover e atrasar

30% x 50% + 70% x 25% = 2,5%.

8. No jogo de Lipa sorteia-se um número entre 1 e 600 (cada número possui a mesma probabilidade). A regra do jogo é: se o número sorteado for múltiplo de 6 então o jogador ganha uma bola branca e se o número sorteado for múltiplo de 10 então o jogador ganha uma bola preta. Qual a probabilidade de o jogador não ganhar nenhuma bola?

$P(A \cup B)^C = \frac{23}{30}$.

5.2 **Relatório**

Relatório – 09/03/2024

No dia nove de março de 2024, às 8h05, realizamos o segundo encontro do Promat na sala A221, com 32 alunos.

Dois alunos chegaram com atraso de cerca de 10 minutos após o início da aula. Durante o encontro também esteve presente uma criança, filho de um casal de alunos.

Começamos mencionando sobre a lista de exercícios do encontro passado, questionando aos alunos se verificaram as respostas que compartilhamos via grupo do *Whatsapp* e se tiveram dificuldades para resolver as questões. Como forma de uma retomada rápida do conteúdo de análise combinatória, escolhemos dois exercícios para discutir e resolver no quadro (exercícios 5 e 6). Enquanto isso, passamos a lista de chamada para os alunos assinarem.

Não havendo dúvidas quanto as resoluções que apresentamos, anunciamos que o conteúdo a ser abordado durante a aula seria probabilidade. Orientamos os alunos a formarem grupos para realizar uma atividade introdutória sobre o assunto, a Corrida do Cavalos. A sala se dividiu da seguinte maneira: sete quartetos, um trio e um aluno preferiu fazer individualmente.

Com os grupos formados, distribuímos os tabuleiros, as peças e os dados enquanto passamos as instruções sobre como prosseguir com a atividade. Cada pessoa do grupo apostaria em dois cavalos, esses numerados de 1 a 13, e eles andariam uma casa do tabuleiro caso a soma das faces superiores dos dois dados em cada jogada, fosse igual ao número do cavalo. O aluno, cujo cavalo que cruzasse a chegada primeiro, ganharia um doce como uma singela premiação.

Percebemos que os alunos, com o anúncio da atividade, logo se animaram para jogar. Os grupos estavam bem distribuídos pela sala de aula e isso nos permitiu transitar com facilidade entre eles enquanto estávamos os instruindo. Alguns grupos optaram por reiniciar o jogo assim que terminaram pois estavam adiantados em relação aos demais, e outros grupos estenderam a jogatina para determinar quem seriam os segundo e terceiro lugares.

Em seguida, distribuímos o questionário sobre a atividade. Auxiliamos os alunos para o preenchimento, explicando algumas questões que muitos tinham dúvidas, como a criação da tabela com as possibilidades de resultados da soma das faces superiores dos dados.

Após o momento em que os alunos responderam ao questionário, corrigimos coletivamente no quadro, sanando mais algumas dúvidas que surgiram. Na primeira questão, em que perguntamos a todos os grupos quem foram os ganhadores, a maioria respondeu entre 7 e 9 e, com essas respostas, questionamos quais cavalos eram mais prováveis de vencer. Com a tabela isso ficou mais evidente para todos, e os alunos puderam verificar qual o número de possibilidades para cada resultado. Continuamente, para resolver a última questão, introduzimos os conceitos de união e intersecção.

Os alunos foram dispensados para o intervalo às 09h40. Um deles veio nos informar que teria que ir embora devido a um compromisso.

Ao retornarmos para a aula, às 10h05, terminamos a correção da atividade da Corrida dos Cavalos e distribuímos o material onde descrevemos as definições importantes de probabilidade, pois alguns alunos não conheciam os conceitos de “experimento aleatório”, “espaço amostral” e “eventos independentes e dependentes”. Além disso, voltamos a comentar sobre as fórmulas de união e intersecção.

Durante as explicações alguns alunos dispersaram com conversas, e mais de uma vez precisamos chamar a atenção, pois na probabilidade é muito importante a interpretação dos problemas e era sobre isso que estávamos falando ao resolver no quadro alguns exemplos.

Posteriormente, entregamos a lista de exercícios e escolhemos as questões 3 e 4 para resolver coletivamente no quadro. Na questão 4 usamos a intersecção de eventos novamente e na questão 3, como no exemplo que utilizamos, resolvemos por meio de número decimais e porcentagem. Após isso, com um restante de 15 minutos de aula, orientamos os alunos a resolverem os demais exercícios da lista enquanto realizávamos a chamada de forma oral.

Caminhamos na sala de aula, tirando mais algumas dúvidas dos alunos até o final da aula, em que pedimos que reorganizassem as carteiras e cadeiras em forma de fileiras novamente, antes de encerrarmos o encontro.

6. Encontro 3

6.1 Plano de aula

Plano de aula – Encontro 3 – 16/03/2024

Público-alvo: Alunos inscritos no projeto de ensino e extensão Promat.

Conteúdo: Matrizes e determinantes.

Objetivo geral: Compreender os conceitos que envolvem matrizes e seus determinantes e desenvolver estratégias de cálculo nos exercícios propostos.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com o conteúdo indicado acima, espera-se que o aluno seja capaz de:

- Conhecer e identificar os tipos de matrizes;
- Representar e interpretar uma tabela de números como uma matriz, identificando seus elementos;
- Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes;
- Calcular o determinante de uma matriz.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Lousa, giz, caderno, lápis, borracha e atividades impressas.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos o encontro reservando um momento para tirar dúvidas quanto aos exercícios entregues na aula anterior e resolver o desafio proposto. *(estimativa 15 minutos)*

Para introduzir o conteúdo de matrizes utilizaremos o exercício introdutório abaixo.

Exercício introdutório:

A professora Meirielly fez uma pesquisa em sua sala de aula. Entre os 20 alunos que estavam presentes sorteou 4 e anotou a altura, peso e idade de cada um deles em uma tabela.

Quadro 3 – Características dos alunos

Aluno	Altura (metros)	Peso (kg)	Idade (anos)
André	1,65	65	16
Maria	1,55	47	16
Joana	1,65	70	17
Gustavo	1,80	90	17

Fonte: Elaborado pelas autoras

A partir dos dados da tabela, fomentaremos uma discussão com a turma.

- Qual o aluno mais velho dentre os sorteados?
- E o aluno mais baixo dentre os sorteados?
- Quais informações podemos obter com os dados da tabela?
- Podemos expressar essa tabela de outra forma? Qual?

Nesse momento, apresentaremos as informações do exercício por meio da matriz a seguir:

$$\begin{pmatrix} 1{,}65 & 65 & 16 \\ 1{,}55 & 47 & 16 \\ 1{,}65 & 70 & 17 \\ 1{,}80 & 90 & 17 \end{pmatrix}$$

A ideia é fazer os alunos perceberem que uma matriz é uma tabela organizada de forma diferente, relacionando o conteúdo com algo com eles já conhecem. Como a função das matrizes é relacionar dados numéricos, por isso seu conceito não é só importante na Matemática, mas também em outras áreas do conhecimento nas mais diversas aplicações.

Também explicaremos que cada elemento de uma matriz A é representado matematicamente como um aij, onde i indica a linha e j a coluna que ele se encontra, respectivamente.

Definição de matriz: uma matriz é uma tabela organizada em linhas e colunas. Cada item em uma matriz é chamado de elemento. Uma matriz com m linhas e n colunas é chamada de matriz de ordem m x n.

Notação $\boldsymbol{a_{ij}}$: a notação a_{ij} refere-se a um elemento específico de uma matriz em que i indica a linha e j a coluna em que o elemento está localizado, respectivamente.

Logo após, entregaremos aos alunos uma lista com os tipos de matrizes e algumas propriedades do determinante (Anexo 1). A partir dessa lista, vamos ler e interpretar coletivamente os conceitos. À medida que percebermos dúvidas ou dificuldades em algum dos tópicos apresentaremos mais exemplos na lousa para prosseguir com clareza. Também questionaremos os discentes se conseguem dar exemplos dos tipos de matrizes e os registraremos para a turma.

(*30 min)*

Após esse momento de definições e explicações iniciais, trabalharemos as operações com matrizes, sempre com o auxílio de exemplos ou de forma contextualizada. Nesse momento, abordaremos a adição, subtração e multiplicação de matrizes. Destacaremos também, que a divisão entre matrizes não está definida.

(estimativa 50 min)

Operações com matrizes

Adição

Dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, chama-se **soma** $A + B$ a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e todo j.

Isso significa que a soma de duas matrizes A e B do tipo $m \times n$ é uma matriz C do mesmo tipo em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B.

Exemplo de soma:

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+0 & 8+1 \\ 9+2 & 9+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Subtração

Dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, chama-se **diferença** $A - B$ a matriz soma de A com a oposta de B.

$$\begin{bmatrix} 11 & 9 & 8 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 9 & 8 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -4 & -7 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 9 & 7 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz oposta

Se a soma entre duas matrizes resultar em uma matriz nula, temos que as matrizes são opostas.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Produto de um número por matriz

Dado um número k e uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, chama-se **produto kA** a matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$ tal que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ para todo i e todo j. Isso significa que multiplicar uma matriz A por um número k é construir uma matriz B formada pelos elementos de A todos multiplicados por k.

Exemplo:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 30 & 21 \end{bmatrix}$$

Produto de matrizes

Dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$, chama-se **produto AB** a matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$ tal que

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$$

Para todo $i \in \{1,2, \dots, m\}$ e todo $k \in \{1,2, \dots, p\}$.

<u>Exemplo</u>:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \; e \; B = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Sendo A do tipo 2×3 e B do tipo 3×1, decorre que existe AB e é do tipo 2×1. Fazendo $AB = C$, devemos calcular c_{11} e c_{21}:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 + 16 + 27 \\ 28 + 40 + 54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 122 \end{bmatrix}$$

Para auxiliar na fixação das operações, deixaremos alguns exemplos para os alunos resolverem e em seguida os corrigiremos, sempre destacando os tipos de matrizes envolvidas.

a) $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}$

b) $5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 25 & 30 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 2.5+9.1 & 2.3+9.2 \\ 5.5+5.1 & 0.3+0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 24 \\ 30 & 0 \end{pmatrix}$$

d)$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 5.1+1.0+2.0 & 5.4+1.1+2.3 & 5.1+1.2+2.1 \\ 1.1+4.0+3.0 & 1.4+4.1+3.3 & 1.1+4.2+3.1 \\ 8.1+0.0+3.0 & 8.4+0.1+3.3 & 8.1+0.2+3.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 27 & 9 \\ 1 & 11 & 12 \\ 8 & 41 & 11 \end{pmatrix}$$

Dando sequência aula, utilizaremos as matrizes contidas nos exemplos para introduzir a ideia de determinante como um número associado a uma matriz. Nesse momento, apresentaremos como realizar o cálculo dos determinantes para as ordens 1,2,3 e 4. Os métodos escolhidos foram Sarrus e Laplace.

Definição de determinante: o determinante é um valor escalar associado a uma matriz quadrada que proporciona informações importantes sobre a matriz, como a invertibilidade e o volume geométrico de um espaço linear transformado pela matriz.

Método de Sarrus: é uma técnica prática para calcular o determinante de matrizes de ordem 3x3. Este método é especialmente útil porque simplifica o processo sem a necessidade de expandir cofatores.

Método de Laplace: também conhecido como expansão por cofatores, é uma técnica para calcular o determinante de uma matriz de qualquer ordem. Essa técnica envolve a decomposição do determinante em termos de determinantes de matrizes menores, chamadas submatrizes.

<u>Exemplos:</u>

- Determinantes de uma matriz 1x1: $det(2) = 2$
- Determinante de uma matriz 2x2: $det\begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 11 & 8 \end{pmatrix} = 12.8 - (11.16) = 96 - (176) = -80.$
- Determinante de uma matriz 3x3: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
- Método de Sarrus: $1.1.1 + 4.2.0 + 1.0.3 - 0.1.1 - 3.2.1 - 1.0.4 = -5$
- Método de Laplace: $(-1)^{(1+1)}.1.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -5$

Posteriormente, para aplicação e fixação dos conceitos, realizaremos uma dinâmica com os alunos chamada ‘’*stop* do determinante’’. Os alunos serão instruídos a virar de costas enquanto uma das estagiárias registra uma matriz na lousa. Quando falarmos ‘’já’’ os alunos devem virar rapidamente e, com base nas explicações anteriores, encontrar o determinante da matriz. O discente que calcular primeiro deve gritar ‘’*stop*’’ em voz alta. As estagiárias irão conferir a resposta dada e, caso esteja certa, o estudante ganhará um prêmio e será convidado para resolver o determinante na lousa explicando seu raciocínio. Se o aluno vencedor não se sentir confortável com o pedido, pode argumentar da carteira e nós faremos a resolução. Na rodada seguinte, o procedimento se repete. Separamos cinco matrizes para encontro, isto é, serão realizadas cinco rodadas (Anexo 2)

(*estimativa 50 min*)

Após a dinâmica, questionaremos os alunos se gostaram da atividade e em qual rodada sentiram mais dificuldade. Também perguntaremos para a turma se restam dúvidas sobre o assunto.

(estimativa 10 min)

Avaliação: A avaliação ocorrerá ao longo da aula acompanhando a participação e interação dos alunos durante as explicações e o desenvolvimento das atividades propostas.

Referências bibliográficas

IEZZI, Gleson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Sequências, matrizes, determinantes e sistemas. 8ª ed. São Paulo: Editora Atual, 2013.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. Determinantes; **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/determinantes-1.htm. Acesso em: 27 fev. de 2024.

RIBEIRO, Amanda Gonçalves. Propriedades dos determinantes; **Mundo Educação**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/propriedades-dos-determinantes.htm#:~:text=1%C2%AA)%20Se%20uma%20matriz%20possuir,resultando%20em%20um%20determinante%20nulo. Acesso em: 26 fev. 2024.

SILVA, Roseli Aparecida Sevenini. **Plano de trabalho matrizes e determinantes**; 2012. Disponível em: https://canal.cecierj.edu.br/anexos/recurso_interno/12756/download/138760480a2a9649fda293631358e97f. Acesso em: 26 fev. 2024.

Anexos

Anexo 1

Tipos de matrizes

Matriz: é uma tabela organizada em linhas e colunas, onde m representa o número de linhas (horizontal) e n o número de colunas (vertical). A expressão $m\ x\ n$ indica a ordem da matriz.

Matriz linha é toda matriz do tipo $1\ x\ n$, isto é, é uma matriz que tem uma única linha.

Exemplo: $\begin{bmatrix} 12 & 7 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha de ordem $1\ x\ 5$.

Matriz coluna é toda matriz do tipo $m\ x\ 1$, isto é, é uma matriz que tem uma única coluna.

Exemplo: $\begin{bmatrix} 4 \\ 17 \\ 5 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna de ordem $3\ x\ 1$.

Matriz nula: é toda matriz em que todos os seus elementos são iguais a zero.

Matriz diagonal é toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero.

Exemplo de matriz diagonal:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Matriz quadrada de ordem $\boldsymbol{n}$: é toda matriz do tipo $n \times n$, isto é, uma matriz que tem o número de linhas igual ao número de colunas.

Exemplo de matriz quadrada de ordem 1x1: $[7]$

Exemplo de matriz quadrada de ordem 2x2: $\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}$

Exemplo de uma matriz quadrada de ordem 3x3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

E assim sucessivamente...

Matriz identidade (ou matriz unidade) de ordem n: é toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1.

Exemplos:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz transposta: Duas matrizes A e B são transpostas se, e somente se, $aij = bji$, ou seja, dado uma matriz A, para encontrar sua transposta, basta tomar as linhas como colunas.

Também conhecida popularmente como ‘’linha vira coluna e coluna vira linha’’.

Exemplos 1:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 15 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 15 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2:

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 2 & 6 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 20 & 5 \\ 2 & 7 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Propriedades do determinante</u>

$\boldsymbol{i}$) Caso uma das linhas da matriz seja igual a 0, então o seu determinante será igual a 0.

$\boldsymbol{ii}$) Seja A e B duas matrizes, $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$.

$\boldsymbol{iii}$) Se uma matriz possuir uma linha ou uma coluna nula, seu determinante será igual a zero.

$\boldsymbol{iv}$) Linhas iguais ou proporcionais fazem com que o determinante da matriz seja igual a 0.

Anexo 2

<u>1ª rodada</u>: $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

Det $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = 4\,.\,5 - (3\,.\,(-2) = 20 + 6 = 26.$

<u>2ª rodada</u>: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

Det$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} = -22 - (-3) = -22 + 3 = -19.$

<u>3ª rodada</u>: $\begin{pmatrix} -7 & 12 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

Det $\begin{pmatrix} -7 & 12 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = -7\,.\,8 - (3\,.\,12) = -56 - (36) = -92.$

<u>4ª rodada</u>: $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \\ 10 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Det $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \\ 10 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 1\,.\,3\,.\,7 + 9\,.\,8\,.\,10 + 5\,.\,3.\,4 - 10\,.\,7\,.\,5 - 4\,.\,8\,.\,1 - 2\,.\,3\,.\,9 = 358.$

<u>5ª rodada</u>: $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Det $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{(1+4)}\,.\,1\,.\,det\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix} = -1\,.\,1\,.\,-31 = 31.$

6.2 Relatório

Relatório – 16/03/2024

Logo que adentramos na sala A221 notamos que estava muito abafada e batendo sol nos alunos, portanto, vimos a possibilidade de mudança de espaço com o professor orientador presente no momento. O docente solicitou que fosse realizada uma votação entre os discentes para verificar se eles preferiam mudar ou permanecer no ambiente. Como a maioria optou por mudar de sala, e após uma análise prévia de disponibilidade, mudamos para a sala A217. Dessa forma, conduzimos os estudantes e nos acomodamos no local para dar início ao terceiro encontro.

Iniciamos a aula às 08h12 perguntando se os alunos tinham dúvidas em relação aos exercícios da lista entregue no encontro anterior, sobre probabilidade. Nesse momento, uma das alunas pediu para que resolvêssemos o desafio. A estagiária Milena realizou a correção do exercício no quadro de dois modos: utilizando a fórmula da combinatória para encontrar as possibilidades e a partir da intersecção de eventos dependentes. Durante a resolução houve boa participação, vários alunos respondiam nossos questionamentos e auxiliavam na resolução dos cálculos.

Dando sequência a aula, introduzimos o conteúdo de matrizes por meio de um exercício introdutório. Utilizando questionamentos e uma metodologia investigativa, explicamos para a turma que uma matriz é uma tabela organizada de forma diferente, cujo objetivo é relacionar dados numéricos. Ao longo das explicações, a turma permaneceu atenta e participativa, com exceção de uma das alunas que ficou lendo um livro e assistindo vídeos no *youtube*. Por ser uma sala menor, os discentes estavam mais próximos uns dos outros e poucas carteiras estavam vazias. Apesar disso, não havia conversa paralela.

Posteriormente, entregamos uma lista com os tipos de matrizes e algumas de suas propriedades. Com a participação da turma, lemos e explicamos os conceitos um a um. Além dos exemplos impressos, também classificamos a matriz do exercício introdutório para auxiliar na fixação do conteúdo. Nesse instante, uma das alunas perguntou qual era a linha e a coluna principal da matriz. Respondemos que não havia uma linha e uma coluna principal, apenas uma diagonal principal. Ademais, destacamos que os elementos da diagonal principal são os $a_{ij},$ em que $i = j$. Outra aluna comentou que poderia dar confusão na simbologia do aij caso fossem números maiores. Nesse sentido, apontamos como sugestão utilizar a vírgula entre o i e o j para matrizes ordens grandes, isto é, $a_{i,j}$.

Na sequência, explicamos sobre as operações com matrizes, com o auxílio de exemplos e de forma contextualizada. Nesse momento, abordamos a adição, subtração e multiplicação de matrizes. Destacamos, também, que a divisão entre matrizes não está definida. Além disso, para mostrar que a multiplicação entre matrizes não é comutativa utilizamos $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Logo após, deixamos algumas operações para os alunos resolverem individualmente. Enquanto isso, circulamos pela sala tirando dúvidas.

Percebemos que os alunos encontraram bastante dificuldade para efetuar as multiplicações entre matrizes nas letras c) e d). Por outro lado, constatamos que a maior parte da turma não teve problemas para efetuar a adição e a multiplicação por um escalar nas letras a) e b). Depois de aproximadamente 10 minutos, realizamos a correção da atividade no quadro, dando maior atenção para os exemplos em que os alunos tiveram maiores dúvidas. Durante a correção, alguns alunos estavam dispersos e mexendo no celular. Um dos alunos estava lendo um livro.

Mais adiante, introduzimos a ideia de determinante como um número associado a uma matriz e apresentamos como realizar o cálculo do determinante para as ordens 1, 2, 3 e 4 utilizando exemplos. Os métodos escolhidos foram Sarrus e Laplace. Nesse momento, uma aluna perguntou se o determinante poderia ser negativo. Respondemos que sim e mostramos dois casos.

Ao final da aula, realizamos a dinâmica ‘’*stop* do determinante’’ para aplicar os conceitos de forma prática e interativa. Explicamos as regras e iniciamos a atividade. Ao todo, foram realizadas quatro das cinco rodadas propostas e, ao final de cada uma, os vencedores efetuaram a resolução no quadro. Como não sobrou tempo para realizar a quinta rodada, deixamos como desafio para o próximo encontro calcular o determinante da última matriz. Um dos estudantes se recusou a participar da dinâmica e permaneceu em sua carteira.

Foi possível perceber que os alunos tiveram relativa facilidade para calcular as matrizes 2x2 na primeira e terceira rodada. Já as matrizes 3x3 levaram um tempo maior. No entanto, a rodada em que a turma teve maior dificuldade foi, claramente, a segunda. Os alunos confundiram os sinais da regra de Sarrus e, consequentemente, surgiram vários ‘’*stops*’’ com respostas incorretas. Levou certo tempo até termos um vencedor. Por outro lado, na quarta rodada os discentes já estavam familiarizados com o método e a resposta correta foi obtida mais rapidamente.

Os alunos se mostraram muito participativos e dispostos a realizar cada uma das atividades propostas na aula, sobretudo na dinâmica. A maior parte da turma estava empenhada em calcular o determinante corretamente e terminar primeiro para ganhar o prêmio. Tanto é que tivemos quatro vencedores distintos, o que tornou a atividade ainda mais emocionante. Além disso, todos os vencedores aceitaram ir até o quadro para explicar seu raciocínio e apresentar a resolução para a turma.

7. **Encontro 4**

7.1 **Plano de aula**

Plano de aula – Encontro 4 – 23/03/2024

Público-alvo: Alunos inscritos no projeto de ensino e extensão Promat.

Conteúdo: Sistemas lineares.

Objetivo geral: Compreender os conceitos que envolvem equações e sistemas lineares e desenvolver estratégias de cálculo nos exercícios propostos.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com o conteúdo indicado acima, espera-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar uma equação linear;
- Diferenciar coeficiente, incógnita e termo independente;
- Encontrar a solução de uma equação linear;
- Compreender o que são sistemas lineares;
- Classificar um sistema linear.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Lousa, giz, caderno, lápis, borracha, cartelas, dados e atividades impressas.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos o encontro resolvendo o desafio proposto na aula anterior. Caso algum aluno tenha conseguido encontrar a solução, vamos sugerir que resolva no quadro para os colegas.

Desafio: Calcule o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Resolução: utilizando o método de Laplace.

Det $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{(1+4)} . 1 . det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix} = -1 . 1 . -31 = 31.$

Posteriormente, vamos apresentar a definição de equação linear no quadro, explicar e dar alguns exemplos.

Equação linear

Uma equação linear é toda equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

onde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são números reais chamados de coeficientes da equação e $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, suas incógnitas. Além disso, o número real b é o termo independente da equação.

São exemplos de equações lineares:

- $2x + 3y = 4$

coeficientes: 2 e 3

incógnitas: x e y

termo independente: 4

- $x - y + z = 0$

coeficientes: 1, -1 e 1

incógnitas: x, y e z

termo independente: 0

- $3y + 4z - 5 = 0$

coeficientes: 3 e 4

incógnitas: y e z

termo independente: 5

Apresentar cada exemplo de forma interativa, para que os alunos auxiliem na classificação dos termos.

Solução de uma equação linear:

Uma solução de uma equação linear é uma sequência de números que tornam a igualdade da equação verdadeira.

Por exemplo: “Para quais valores de x e y, respectivamente, a equação apresentada a seguir é verdadeira?”

$$x - 2y = 5$$

Observe que $x = 7$ e $y = 1$ é uma solução, pois ao substituirmos na equação, obtemos: $7 - 2 * 1 = 7 - 2 = 5$

Dizemos então que o par $(7,1)$ é uma solução para a equação $x - 2y = 5$.

Um outro exemplo: “A terna $(3, -4,7)$ é solução da equação $x - 2y + z = 18$?” Sim, pois $3 - 2 \cdot (-4) + 7 = 18$. “E a terna $(-1,2,4)$ é solução?”

Não, pois $-1 - 2 \cdot 2 + 4 \neq 18$.

Sistema linear

Um sistema linear é um conjunto de equações lineares, podendo ter várias incógnitas e várias equações. Ele pode ser resolvido por meio de diferentes métodos. Vamos abordar os métodos de resolução por meio de um exercício introdutório.

Neste momento, deixaremos três exercícios para que os alunos resolverem:

Exercício 1: São exemplos de equações lineares, exceto:

a) $2x + 3y = 4$
b) $x + y + z = 1$
c) $-4a + 5b - 3c = 0$
d) $9a^2 + 5a - 8 = 0$

Resposta: letra d)

A equação $9a^2 + 5a - 8 = 0$ não é linear, pois envolve uma incógnita elevada ao quadrado.

Exercício 2: Uma possível solução da equação linear $2x - y = 3$ é o par:

a) $(0,1)$
b) $(1,3)$
c) $(0, -3)$

d) $(-1,2)$
e) $(-1,0)$

Resposta: letra c)

$2 \,.\, 0 - (-3) = 3.$

Exercício 3: Dada a equação linear

$$-x + 2y + z = 0$$

A soma dos seus coeficientes é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Resposta: letra c)

$-1 + 2 + 1 = 2.$

Exercício introdutório

Em um escritório de advocacia trabalham apenas dois advogados e uma secretária. Como o Dr. André e o Dr. Carlos sempre advogam em causas diferentes, a secretária Cláudia coloca 1 grampo em cada processo do Dr. André e 2 grampos em cada processo do Dr. Carlos, para diferenciá-los facilmente no arquivo. Sabendo-se que, ao todo, são 78 processos nos quais foram usados 110 grampos. Calcule o número de processos do Dr. Carlos.

Resolução:

Método da substituição.

Seja

x = processos do Dr. André
y = processos do Dr. Carlos
Temos que:
$\underline{\boldsymbol{x + y = 78}}$ (Eq. 1) , ou seja,

$$x = 78 - y \text{ (i)}$$

$\underline{\boldsymbol{x + 2y = 110}}$ (Eq. 2), substituindo (i) na (Eq. 2):

$$(78 - y) + 2y = 110 \Rightarrow y = 110 - 78 = 32$$

Substituindo y na (Eq. 1): $x + 32 = 78 \Rightarrow x = 78 - 32 = 46$

Portanto, $x = 46$ e $y = 32.$

Método de adição.

Vale ressaltar que o objetivo deste método é eliminar uma das incógnitas, para assim encontrar a solução da(s) outra(s).

Seja

x = processos do Dr. André

y = processos do Dr. Carlos

Temos que:

$\underline{\boldsymbol{x + y = 78}}$ (Eq. 1)

$\underline{\boldsymbol{x + 2y = 110}}$ (Eq. 2)

Como queremos eliminar uma das incógnitas, precisamos primeiramente multiplicar uma das equações por (-1) (relembrar o aluno que podemos fazer isto pois estamos trabalhando com equações, ou seja, somando os mesmos valores dos dois lados da igualdade).

Multiplicando a (Eq. 1) por -1, temos:

$$(x + y = 78) * -1 \Rightarrow -x - y = -78$$

Agora, somaremos a (Eq. 1) com a (Eq. 2):

$$\begin{array}{rr} & -x - y = -78 \\ + & x + 2y = 110 \\ \hline & y = 32 \end{array}$$

Como obtemos o valor de y, basta substituir em uma das equações:

Substituindo na (Eq. 2): $x + 2 * 32 = 110 \Rightarrow x = 110 - 64 = 46$

Portanto, $x = 46$ e $y = 32.$

Método da comparação.

Vale ressaltar que este método tem como objetivo levar o aluno a comparar os valores de uma mesma incógnita, ou seja, isolaremos o “x” ou o “y" nas duas equações para fazermos a comparação.

Seja

x = processos do Dr. André

y = processos do Dr. Carlos

Temos que:

$\underline{\boldsymbol{x + y = 78}}$ (Eq. 1)

$\underline{\boldsymbol{x + 2y = 110}}$ (Eq. 2)

Por conveniência, isolaremos a incógnita x:

Da (Eq. 1): $x + y = 78 \Rightarrow x = 78 - y$

Da (Eq. 2): $x + 2y = 110 \Rightarrow x = 110 - 2y$

Logo, temos que:

$$78 - y = 110 - 2y$$
$$\Rightarrow 2y - y = 110 - 78$$
$$\Rightarrow y = 32$$

Substituindo na (Eq. 1): $x + y = 78 \Rightarrow x = 78 - 32 = 46$

Portanto, $x = 46$ e $y = 32$.

Nesse momento, também é importante ressaltar que uma equação linear é sempre uma igualdade em que há incógnitas envolvidas. Além disso, destacar a diferença entre função e equação.

Uma equação é uma igualdade entre os elementos de dois membros, em que esses elementos são resultados de operações matemáticas entre números conhecidos e desconhecidos. Já, uma função é uma regra matemática que relaciona cada elemento de um conjunto A, a um único elemento de um conjunto B.

Nas equações, a ideia central é que cada incógnita represente um número. Já a função possui variáveis, ou seja, uma variável muitas vezes chamada de $f(x)$ a qual depende do valor que a variável x assumir.

Sistema linear representado na forma matricial

Além da simbologia tradicional, um sistema linear também pode ser escrito em sua forma matricial, como no exemplo abaixo:

<u>Exemplo:</u>

O sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Onde $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ é a matriz dos coeficientes.

Onde $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é a matriz das incógnitas.

Onde $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ é a matriz dos termos independentes.

Sistema linear homogêneo

Quando todos os termos independentes de um sistema linear são iguais a zero, dizemos que esse é um sistema linear homogêneo. Uma das soluções desse sistema é chamada nula ou trivial. Além da trivial, um sistema homogêneo também pode ter outras soluções.

Exemplo:

O sistema $\begin{cases} 2x + 6y + 4z = 0 \\ x - 2y - 8z = 0 \\ 3x + 5y - 2z = 0 \end{cases}$ é linear homogêneo e possui a solução trivial $(0, 0, 0)$. Além dela, temos também como solução $(4, -2, 1)$.

Na sequência, dividiremos a turma em grupos de três estudantes para a realização do jogo ‘’Batalha Algébrica’’. Explicaremos as regras e circularemos pela sala, a fim de auxiliar os grupos e acompanhar o desenvolvimento da dinâmica.

Jogo Batalha Algébrica – Sistemas de equações

- O jogo pode ser realizado com 3 jogadores, sendo dois oponentes e um juiz. Este último é responsável pelas cartas que contém as respostas.
- O primeiro jogador lança dois dados e localiza a caixa correspondente no tabuleiro de jogo (Apêndice 1). Por exemplo, se os dados mostram 3 e 4, o jogador pode escolher entre a fila 3 e coluna 4, ou a fila 4 e coluna 3.
- O jogador deve resolver o sistema e o juiz deve verificar se está correta a solução que o jogador apresentar. Se a solução estiver correta o jogador coloca a sua inicial no quadrado correspondente, mas se incorreta o outro jogador pode roubar a caixa, dando a solução correta.

- Se um jogador joga o dado e indica uma caixa já ocupada, o jogador passa a vez.
- O vencedor é aquele que, quando o tabuleiro estiver todo preenchido, terá mais quadrados marcados com sua inicial.

Classificação de sistema linear

Um sistema linear é um conjunto de equações lineares, podendo ter várias incógnitas e várias equações. Existem vários métodos para resolvê-lo, independentemente da quantidade de equações. Existem três classificações para um sistema linear.

Sistema possível determinado (SPD): há apenas uma solução possível para o sistema. Para isso, o determinante principal do sistema deve ser diferente de 0.

Sistema possível indeterminado (SPI): há infinitas soluções para o sistema. Para isso, o determinante principal do sistema deve ser igual a 0, e os determinantes secundários devem ser iguais a 0.

Sistema impossível (SI): Sistema Impossível (SI): não há soluções para o sistema. Para isso, o determinante principal deve ser igual a 0, e pelo menos um determinante secundário deve ser diferente de 0.

Regra de Crammer: A regra de Cramer é um método utilizado para encontrar o conjunto solução de um sistema de equação linear possível determinado. Essa regra utiliza o determinante das matrizes associadas ao sistema para encontrar as soluções do sistema. O método é aplicado principalmente em sistemas lineares que possuem 3 incógnitas e 3 equações, mas pode ser empregado também em sistemas lineares 2 por 2.

Exemplo: Resolva o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

Resolução:

Para resolver esse sistema aplicando a regra de Crammer, de início calcularemos o determinando D:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$D = 2\,.\,4 - 3\,.\,5$$

$$D = 8 - 15$$

$$D = -7.$$

Como $D \neq 0$, então o sistema é possível e determinado (SPD) e possui uma única solução.

Agora, para determinar a solução calculares D_x e D_y:

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$$

$$D_x = 3\,.\,4 - 8\,.\,5$$

$$D_x = 12 - 40 = -28.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$D_y = 2\,.\,8 - 3\,.\,3$$

$$D_y = 16 - 9$$

$$D_y = 7.$$

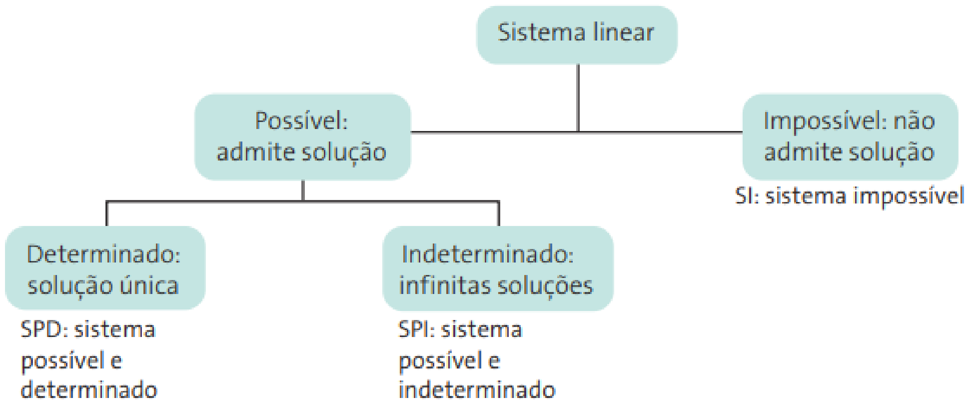
Como conhecemos os valores de D, D_x e D_y, podemos encontrar o valor de cada uma das incógnitas:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-28}{-7} = 4.$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-7}{7} = -1.$$

Portanto, o sistema possui uma única solução $S = \{4, -1\}$.

Figura 7 – Esquema da classificação de sistemas lineares



Fonte: Andrade (2020)

Por fim, entregaremos aos alunos uma lista de exercícios (Anexo), a fim de aplicar os conceitos trabalhados na aula. Enquanto isso, circularemos pela sala tirando dúvidas. De forma estratégica, corrigiremos as questões no quadro.

Avaliação: A avaliação ocorrerá ao longo da aula acompanhando a participação e interação dos alunos durante a dinâmica e o desenvolvimento das atividades propostas.

Referências bibliográficas

ANDRADE, Thais Marcelle de. **Matemática Interligada:** Matrizes, sistemas lineares e Geometria analítica. São Paulo: Editora Scipione, 2020.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Sequências, matrizes, determinantes e sistemas. 8ª ed. São Paulo: Editora Atual, 2013.

ROSA, Andrea Stephanie Moreira; OLIVEIRA, Wenderson Ferreira; LYRA-SILVA, Gene Maria Vieira; CEDRO, Wellington Lima. Brincando com a álgebra: o uso de jogos no ensino de sistemas de equações lineares. Tangram – **Revista de Educação Matemática**, Dourados – MS, v.3, n.4, p. 173-188, ago. 2020. Disponível em: https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/tangram/article/view/10968/6515. Acesso em: 21 mar. 2024.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. Sistemas lineares; **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/sistemas-lineares.htm. Acesso em: 19 mar. 2024.

Equação Linear; **Quero Bolsa**. Disponível em: https://querobolsa.com.br/enem/matematica/equacao-linear. Acesso em: 18 mar. 2024.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. Regra de Cramer; Mundo Educação. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/solucao-um-sistema-utilizando-regra-cramer.htm. Acesso em: 18 mar. 2024.

Apêndices

Figura 8 – Tabuleiro bingo das equações

	1	2	3	4	5	6
1	$\begin{cases} x+y=20 \\ 3x+4y=72 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-3y=-18 \\ 4x-12y=-80 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+2y=-22 \\ 2x-4y=-38 \end{cases}$	$\begin{cases} -2x+2y=25 \\ -2x+5y=-14 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y=2 \\ x+3y=-4 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x+5y=0 \\ 3x+10y=-42 \end{cases}$
2	$\begin{cases} y+x=-14 \\ 5x+10=y \end{cases}$	$\begin{cases} -4x-4y=-12 \\ 4x+3y=-18 \end{cases}$	$\begin{cases} y=x+9 \\ -5y-x=-29 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y=-10 \\ -2x+5y=-52 \end{cases}$	$\begin{cases} -5x-5y=15 \\ -3x+5y=-11 \end{cases}$	$\begin{cases} -5x+4y=-32 \\ 2x-4y=-8 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 4x+y=-16 \\ 4x+3y=-5 \end{cases}$	$\begin{cases} x-5y=6 \\ 3x-3y=6 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-4y=-10 \\ 4y+2x=30 \end{cases}$	$\begin{cases} -5x+2y=2 \\ 5x+5y=5 \end{cases}$	$\begin{cases} 4y-7x=32 \\ y=x-4 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y=11 \\ x-2y=15 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x+y=12 \\ 3x-y=20 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+3y=-12 \\ 3x+9y=-6 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 3x+9y=-20 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+2y=-5 \\ -2y=-7-x \end{cases}$	$\begin{cases} -5x+y=-51 \\ 10x-4y=114 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x+2y=13 \\ 15x-3y=-42 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x-4y=-4 \\ x+4y=34 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y=4 \\ 5x-5y=20 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x-4y=-5 \\ x=13-2y \end{cases}$	$\begin{cases} 5x+5y=-24 \\ -x+5y=-2 \end{cases}$	$\begin{cases} x=5-2y \\ 3x-5y=4 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x+2y=10 \\ 15x-3y=45 \end{cases}$
6	$\begin{cases} y-5x=-36 \\ -5x-20=5y \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+5y=5 \\ -3x+5y=5 \end{cases}$	$\begin{cases} 4y=-2x+2 \\ -2x-5y=-1 \end{cases}$	$\begin{cases} -3x+4y=24 \\ -4x+16y=32 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 3x+3y=-21 \end{cases}$	$\begin{cases} x-5y=15 \\ -3x-y=-3 \end{cases}$

Fonte: Elaborado pelas autoras

Figura 9 – Gabarito bingo das equações

	1	2	3	4	5	6
1	$(8,12)$	$(1,7)$	$(-\frac{41}{3},\frac{8}{3})$	$(-\frac{51}{2},-13)$	$(2,-2)$	$(6,-6)$
2	$(-4,-10)$	$(-27,30)$	$(\frac{-8}{3},\frac{19}{3})$	$(6,-8)$	$(-\frac{1}{2},-\frac{5}{2})$	$(\frac{40}{3},\frac{26}{3})$
3	$(\frac{-43}{8},\frac{11}{2})$	$(1,-1)$	$(5,5)$	$(0,1)$	$(-16,-20)$	$(7,-4)$
4	$(8,4)$	$(-5,1)$	$(\frac{16}{3},-4)$	$(-3,2)$	$(9,-6)$	$(-1,9)$
5	$(10,6)$	$(4,0)$	$(3,5)$	$(-\frac{11}{3},-\frac{17}{15})$	$(3,1)$	$(\frac{8}{3},-\frac{5}{3})$
6	$(\frac{16}{3},\frac{-28}{3})$	$(0,1)$	$(3,-1)$	$(-8,0)$	$(-\frac{16}{5},\frac{-19}{5})$	$(\frac{15}{8},-\frac{21}{8})$

Fonte: Elaborado pelas autoras

Anexos

1. A matriz incompleta que representa o sistema linear a seguir é:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6z = 4 \\ -x - y - z = -1 \\ x + 2y + 3z = 7 \end{cases}$$

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

Resolução:

Alternativa C.

A matriz incompleta é aquela que possui os coeficientes de x, y e z, logo, ela será uma matriz 3x3. Analisando-se as alternativas, a que contém a matriz 3x3 com os sinais corretos é a de letra C.

2. (Saeb 2011) Um teste é composto por 20 questões classificadas em verdadeiras ou falsas. O número de questões verdadeiras supera o número de questões falsas em 4 unidades. Sendo x o número de questões verdadeiras e y o número de questões falsas, o sistema associado a esse problema é:

a) $\begin{cases} x - y = 20 \\ x = 4 - y \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 20 \\ y = 4x \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 20 \\ x = 4y \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 4 \end{cases}$

Resolução:

Alternativa D.

Sendo x o número de questões verdadeiras e y o número de questões falsas, consideramos que a soma entre eles é igual a 20, ou seja:

$$x + y = 20$$

Além disso, sabemos que há 4 questões verdadeiras a mais que questões falsas, então a diferença entre o número de questões verdadeiras e o número de questões falsas é 4. Ou seja:

$$x - y = 4$$

A alternativa que contém o sistema com essas duas equações é a alternativa D.

3. (Enem Digital 2020) Para sua festa de 17 anos, o aniversariante convidará 132 pessoas. Ele convidará 26 mulheres a mais do que o número de homens. A empresa contratada para realizar a festa cobrará R$ 50,00 por convidado do sexo masculino e R$ 45,00 por convidado do sexo feminino.

Quanto esse aniversariante terá que pagar, em real, à empresa contratada, pela quantidade de homens convidados para sua festa?

a) 2 385,00

b) 2 650,00

c) 3 300,00

d) 3 950,00

e) 5 300,00

Resolução:

Alternativa B.

Podemos resolver esta questão de matemática do ENEM 2020 (aplicação digital) usando sistemas lineares. Sejam H a quantidade de homens e M a quantidade de mulheres, então:

$$H + M = 132 \ (I)$$
$$M = H + 26 \ (II)$$

Basta aplicar (II) em (I).

$$H + H + 26 = 132$$
$$2H = 132 - 26$$
$$2H = 106$$
$$H = 53$$

Agora é só multiplicar 53 por R$ 50,00 e teremos R$ 2 650,00.

4. (Enem 2011) O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$ 100 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 350 000,00, enquanto a segunda cobrou R$ 120 000,00 por km construído (n) acrescido de um valor fixo de R$ 150 000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada.

Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

a) 100n + 350 = 120n + 150

b) 100n + 150 = 120n + 350

c) 100(n + 350) = 120(n + 150)

d) 100(n + 350 000) = 120(n + 150 000)

e) 350(n + 100 000) = 150(n + 120 000)

Resolução:

Alternativa A.

Podemos descrever essa situação pela equação:

A equação que representa o valor da primeira empresa é V1= 100 000n + 350 000, e a da segunda empresa é V2 = 120 000n + 150 000.

Igualando as duas equações, temos que:

100 000n + 350 000 = 120 000n + 150 000

Dividindo por 1000, a equação será:

100n + 350 = 120n + 150.

5. (MS Concursos) O sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 4x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

A) não tem solução.

B) admite apenas uma solução trivial.

C) admite infinitas soluções.

D) admite apenas soluções não triviais.

Resolução:

Alternativa C.

Calculando o determinando principal obtemos

$$det\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix} = 1\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot4+0\cdot2\cdot3-4\cdot1\cdot0-3\cdot1\cdot1-1\cdot2\cdot1 = 0.$$

Logo, como $D = 0$ o sistema linear associado admite infinitas ou nenhuma solução. Para determinar qual dos casos acontece vamos calcular os determinantes secundários.

$$D_x = det\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix} = 0\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot0+0\cdot0\cdot3-0\cdot1\cdot0-3\cdot1\cdot0-1\cdot0\cdot1 = 0$$

$$D_y = det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix} = 1\cdot0\cdot1+0\cdot1\cdot4+0\cdot2\cdot0-4\cdot0\cdot0-0\cdot1\cdot1-1\cdot2\cdot0 = 0$$

$$D_x = det\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix} = 1\cdot1\cdot0+1\cdot0\cdot4+0\cdot2\cdot3-4\cdot1\cdot0-3\cdot0\cdot1-0\cdot2\cdot1 = 0$$

Portanto, como todos os determinantes secundários são iguais a zero, o sistema linear associado admite infinitas soluções.

6. (Enem 2ª aplicação 2010) Algumas pesquisas estão sendo desenvolvidas para se obter arroz e feijão com maiores teores de ferro e zinco e tolerantes à seca. Em média, para cada 100 g de arroz cozido, o teor de ferro é de 1,5 mg e o de zinco é de 2,0 mg. Para 100 g de feijão, é de 7 mg o teor de ferro e de 3 mg o de zinco. Sabe-se que as necessidades diárias dos dois micronutrientes para uma pessoa adulta são de aproximadamente 12,25 mg de ferro e 10 mg de zinco. Considere que uma pessoa adulta deseja satisfazer suas necessidades diárias de ferro e zinco ingerindo apenas arroz e feijão. Suponha que seu organismo absorva completamente todos os micronutrientes oriundos desses alimentos. Na situação descrita, que quantidade a pessoa deveria comer diariamente de arroz e feijão, respectivamente?

a) 58 g e 456 g

b) 200 g e 200 g

c) 350 g e 100 g

d) 375 g e 500 g

e) 400 g e 89 g

Resolução:

Alternativa C.

Após resolvermos o sistema de equações descobrimos que a será necessário 350g arroz e 100g de feijão.

Montando um sistema:

Aqui precisamos utilizar a proporção de cada nutriente presente em 100g de alimento. Com isso a soma das quantidades presentes em 100 gramas multiplicadas pelas incógnitas nos dará a quantidade proporcional.

Vejamos:

$$x = arroz$$

$$y = feijão$$

$$1{,}5x + 7y = 12{,}25$$

$$2x + 3y = 10$$

$$x = (10 - 3y)/2$$

$$3/2\,.\,(10 - 3y)/2 + 7y = 12{,}25$$

$$30 - 9y + 28y = 49$$

$$19y = 19$$

$$y = 1$$

$$x = (10 - 3.1)\,/\,2$$

$$x = 7/2$$

$$x = 3{,}5$$

Como é proporcional a $100g$ temos:

$$arroz = 100\,.\,3{,}5 = 350g$$

$$feijão = 100\,.\,1 = 100g$$

7. (Enem 2015) Uma barraca de tiro ao alvo de um parque de diversões dará um prêmio de R$20,00 ao participante, cada vez que ele acertar o alvo. Por outro lado, cada vez que ele errar o alvo, deverá pagar R$10,00. Não há cobrança inicial para participar do jogo. Um participante deu 80 tiros e, ao final, recebeu R$100,00.

Qual foi o número de vezes que esse participante acertou o alvo?

a) 30

b) 36

c) 50

d) 60

e) 64

Resolução:

Alternativa A.

Temos que:

$$x = nº \text{ de acertos.}$$

$$y = nº \text{ de erros.}$$

Assim,

$$20x – 10y = 100 \implies 2x – y = 10$$

Temos também que

$$x + y = 80$$

Temos um sistema de equações lineares, basta resolver para encontrar x.

Somando as duas equações:

$$3x = 90x \implies x = 30.$$

7.2 Relatório

Relatório 23/03/2024

Iniciamos a aula às 8h05, com a resolução do desafio deixado na aula anterior. A estagiária Milena conduziu a resolução no quadro. Durante essa atividade, um aluno levantou uma questão sobre Laplace, perguntando como seria a solução se tivesse escolhido a coluna 3 em vez da coluna 1. Decidimos, então, resolver também conforme a sugestão dele para esclarecer quaisquer dúvidas.

A estagiária Meirielly deu continuidade à aula apresentando as equações lineares. Durante a explicação, uma aluna perguntou: "O que é o zero que sobra quando o termo independente fica do lado esquerdo da igualdade?". Meirielly esclareceu a dúvida prontamente. A explicação foi bastante interativa, com vários alunos contribuindo com exemplos adicionais.

Durante os exercícios de fixação, surgiram dúvidas relacionadas aos sinais dos coeficientes. Por exemplo, no exercício 3, um aluno achou que o coeficiente era 1, quando na verdade era -1. Apesar dessas dificuldades, muitos alunos conseguiram resolver os exercícios com facilidade.

Uma aluna compartilhou que havia aprendido na escola o método resolutivo para resolver equações de segundo grau e perguntou se poderia usá-lo para as equações apresentadas no quadro. Explicamos que as equações apresentadas tinham duas incógnitas e necessitavam ser resolvidas por meio de um sistema de equações lineares, que estudaríamos a seguir. Para equações do primeiro grau com uma única incógnita, o método resolutivo seria adequado, bastando isolar a incógnita.

A estagiária Stephany introduziu o tema de sistemas de equações e equações homogêneas. Em seguida, a estagiária Ana, com a colaboração dos alunos, resolveu o exercício introdutório. Um aluno sugeriu a resolução por substituição, que envolve isolar uma incógnita na primeira equação e substituí-la na segunda.

Após o intervalo, dois alunos levantaram dúvidas pertinentes. Uma aluna questionou um passo do cálculo no exercício pelo método da substituição, e outro aluno perguntou se poderia chutar os valores. Respondemos às dúvidas e apresentamos outros dois métodos de resolução: o da Adição e o da Comparação.

A estagiária Milena falou sobre sistemas e matrizes. Depois dessa explicação, introduzimos o jogo Batalha Algébrica. Demos as instruções necessárias e solicitamos que os alunos se dividissem em trios para jogar. Durante o jogo, passamos entre os grupos para tirar eventuais dúvidas. Observamos que os alunos se ajudavam mutuamente na resolução dos sistemas de equações, e os “juízes” estavam empolgados para na próxima rodada serem jogadores e resolverem as equações. Finalizamos a aula às 11h40 com 29 alunos presentes.

8. **Encontro 5**

8.1 **Plano de aula**

Plano de aula – Encontro 5 – 06/04/2024

Público-alvo: Alunos inscritos no projeto de ensino e extensão Promat.

Conteúdo: Geometria analítica.

Objetivo geral: Compreender os conceitos que envolvem a geometria analítica e desenvolver estratégias de cálculo nos exercícios propostos.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com o conteúdo indicado acima, espera-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar pontos no plano cartesiano;
- Verificar se três pontos são colineares;

- Reconhecer e determinar a equação da reta;
- Calcular a distância entre dois pontos e entre um ponto e uma reta.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Lousa, giz, caderno, lápis, borracha e atividades impressas.

Encaminhamento metodológico:

A fim de aplicar o conteúdo trabalhado anteriormente, iniciaremos o encontro resolvendo dois exercícios da lista entregue na última aula, a respeito de sistemas lineares.

2. (Saeb 2011) Um teste é composto por 20 questões classificadas em verdadeiras ou falsas. O número de questões verdadeiras supera o número de questões falsas em 4 unidades. Sendo x o número de questões verdadeiras e y o número de questões falsas, o sistema associado a esse problema é:

a) $\begin{cases} x - y = 20 \\ x = 4 - y \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 20 \\ y = 4x \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 20 \\ x = 4y \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 4 \end{cases}$

Resolução:

Alternativa D.

Sendo x o número de questões verdadeiras e y o número de questões falsas, consideramos que a soma entre eles é igual a 20, ou seja:

$$x + y = 20$$

Além disso, sabemos que há 4 questões verdadeiras a mais que questões falsas, então a diferença entre o número de questões verdadeiras e o número de questões falsas é 4. Ou seja:

$$x - y = 4$$

A alternativa que contém o sistema com essas duas equações é a alternativa D.

3. (Enem Digital 2020) Para sua festa de 17 anos, o aniversariante convidará 132 pessoas. Ele convidará 26 mulheres a mais do que o número de homens. A empresa contratada para realizar a festa cobrará R$ 50,00 por convidado do sexo masculino e R$ 45,00 por convidado do sexo feminino.

Quanto esse aniversariante terá que pagar, em real, à empresa contratada, pela quantidade de homens convidados para sua festa?

a) 2 385,00

b) 2 650,00

c) 3 300,00

d) 3 950,00

e) 5 300,00

Resolução:

Alternativa B.

Podemos resolver esta questão de matemática do ENEM 2020 (aplicação digital) usando sistemas lineares. Sejam H a quantidade de homens e M a quantidade de mulheres, então:

$$H + M = 132 \text{ (I)}$$
$$M = H + 26 \text{ (II)}$$

Basta aplicar (II) em (I).

$$H + H + 26 = 132$$
$$2H = 132 - 26$$
$$2H = 106$$
$$H = 53$$

Agora é só multiplicar 53 por R$ 50,00 e teremos R$ 2 650,00.

Na sequência, entregaremos aos alunos um material com as três classificações de sistemas lineares e um esquema para sintetizar as ideias (Anexo 1). Após lê-lo com a participação da turma, explicaremos a regra de Cramer a partir de um exemplo.

Regra de Crammer: A regra de Cramer é um método utilizado para classificar os sistemas lineares em SPD, SPI e SI, encontrar o conjunto solução de um sistema de equação linear possível determinado. Essa regra utiliza o determinante das matrizes associadas ao sistema para encontrar as soluções do sistema.

Exemplo: Classifique o sistema linear a seguir em SPD, SPI ou SI.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

Resolução:

Para resolver esse sistema aplicando a regra de Crammer, de início calcularemos o determinando D:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$D = 2 \,.\, 4 - 3 \,.\, 5$$

$$D = 8 - 15$$

$$D = -7.$$

Como $D \neq 0$, então o sistema é possível e determinado (SPD) e possui uma única solução.

Agora, para determinar a solução calculares D_x e D_y:

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$$

$$D_x = 3 \,.\, 4 - 8 \,.\, 5$$

$$D_x = 12 - 40 = -28.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$D_y = 2 \,.\, 8 - 3 \,.\, 3$$

$$D_y = 16 - 9$$

$$D_y = 7.$$

Como conhecemos os valores de D, D_x e D_y, podemos encontrar o valor de cada uma das incógnitas:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-28}{-7} = 4.$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-7}{7} = -1.$$

Portanto, o sistema possui uma única solução $S = \{4, -1\}$.

(25 minutos)

Posteriormente, entregaremos aos alunos um material impresso (Anexo 2) contendo importantes definições a serem trabalhadas no encontro. A partir dele, apresentaremos o conceito de plano cartesiano.

Nesse momento, explicaremos que:

- O plano cartesiano é um instrumento matemático utilizado para localização de pontos.
- Os eixos no plano cartesiano são retas perpendiculares ordenadas chamadas de eixo das abscissas (ou eixo do x) e eixo das ordenadas (ou eixo do y).
- As retas perpendiculares dividem o plano em quatro regiões, que são chamadas de quadrantes
- Cada ponto do plano cartesiano possui uma coordenada em relação ao eixo das abscissas e uma coordenada em relação ao eixo das ordenadas.
- As coordenadas de cada ponto são representadas por um par ordenado (x, y)."

Também podemos destacar que ponto, reta e plano são noções primitivas dentro da Geometria. Os conceitos geométricos são estabelecidos por meio de definições. As noções primitivas são adotadas sem definição. Como podemos imaginar ou formar conceitos de ponto, reta e plano, então serão aceitos sem definição.

Para assimilar as ideias e a fim de definir segmento e ponto médio de um segmento, questionaremos os alunos sobre algumas ideias.

Como faríamos para marcar o ponto (1,3) e o ponto (0,0)?

Segmento de reta: segmento de reta é definido como uma parte da reta, o qual está delimitada por dois pontos.

Logo, temos um segmento de reta que liga o ponto (1,3) ao ponto (0,0). E qual seria o ponto médio desse segmento?

Ponto médio: o ponto médio de um segmento de reta é o ponto que separa o segmento em duas partes com medidas iguais. Portanto, considerando M o ponto médio do segmento AB, temos a seguinte expressão matemática para determinar as coordenadas do ponto médio de qualquer segmento no plano cartesiano:

$$M = \left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right)$$

Assim, o ponto médio do segmento que liga o ponto (1,3) ao ponto (0,0) é

$$M = \left(\frac{1+0}{2}, \frac{3+0}{2}\right) = (0{,}5\ , 1{,}5).$$

Seguidamente deixaremos um tempo para os alunos resolverem dois exercícios de fixação.

(20 minutos)

<u>Exercícios de fixação</u>

1. Marque os pontos $A = (2, 3)$, $B = (-2{,}5)$, $C = (-3, -2)$ e $D = (1, -4)$ no plano cartesiano.

2. Encontre os pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, e $\overline{CD}$.

(*15 minutos)*

Dando sequência a aula, apresentaremos o que são pontos colineares e como determinar se três pontos dados são colineares por meio do cálculo do determinante.

Pontos Colineares: ponto colineares são pontos que pertencem a uma mesma reta.

Para saber se os três pontos são colineares, optamos por primeiro construir a matriz em que os elementos da primeira e segunda coluna são as coordenadas x e y de cada ponto, e a última coluna possui termos igual a 1. Dados três pontos de coordenadas $P_1 = (x_1\,, y_1), P_2 = (x_2, y_2) e\ P_3 = (x_3, y_3)$, se esses três pontos estão alinhados, eles serão colineares se:

$$det(A) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Caso o determinante $det(A)$ seja diferente de 0, então esses pontos são ditos não colineares.

<u>Exemplo:</u> Verifique se os pontos $A = (3{,}2)$, $B = (4{,}4)$ e $C = (5{,}6)$ são colineares.

Resolução: Para verificar se esses pontos são colineares, primeiro montaremos o determinante da matriz, substituindo cada linha pela abcissa e a ordenada de cada ponto:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Calculando o $det(A)$, temos que

$$det\,(A) = 3 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 4 \cdot 6 - 1 \cdot 4 \cdot 5 - 3 \cdot 1 \cdot 6 - 2 \cdot 4 \ \cdot 1$$

$$det\,(A) = 12 + 10 + 24 - 20 - 18 - 8$$

$$det\,(A) = 46 - 46$$

$$det\,(A) = 0$$

Logo, como $det(A) = 0$, os pontos $A, B\ e\ C$ são colineares.

(15 minutos)

Após este momento, explicaremos como calcular a distância entre dois pontos a partir de um exercício. Em seguida, o corrigiremos no quadro.

A distância será encontrada utilizando o Teorema de Pitágoras, onde os catetos dependem das diferenças entre abscissas e ordenadas. Ou seja, a distância d será:

$$d^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{(x_B - x_A\,)^2 + (y_B - y_A\,)^2}$$

<u>Exercício:</u> O triângulo ABC possui as coordenadas $A = (2, 2)$, $B = (-4, -6)$ e $C = (4, -12)$. Qual o perímetro desse triângulo?

Resposta:

Resposta correta: $10(\sqrt{2} + 2)$

1º passo: Calcular a distância entre os pontos A e B.

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(2 - (-4))^2 + (2 - (-6))^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(6)^2 + (8)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{36 + 64}$$

$$d_{AB} = \sqrt{100}$$

$$d_{AB} = 10$$

2º passo: Calcular a distância entre os pontos A e C.

$$d_{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(2 - 4)^2 + (2 - (-12))^2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(-2)^2 + (14)^2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{4 + 196}$$

$$d_{AC} = \sqrt{200}$$

$$d_{AC} = 10\sqrt{2}$$

3º passo: Calcular a distância entre os pontos B e C.

$$d_{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{((-4) - 4)^2 + (-6 - (-12))^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(-8)^2 + (6)^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{64 + 36}$$

$$d_{BC} = \sqrt{100}$$

$$d_{BC} = 10$$

Podemos observar que o triângulo tem dois lados iguais dAB = dBC, sendo assim, o triângulo é isósceles e seu perímetro é:

$$p = L_{AB} + L_{BC} + L_{AC}$$

$$p = 10 + 10 + 10\sqrt{2}$$

$p = 10(\sqrt{2} + 2)$ ou $p = 20 + 10\sqrt{2}$.

(40 minutos)

Posteriormente, apresentaremos a definição da equação geral e reduzida da reta.

Equação geral da reta

Toda reta do plano cartesiano está associada ao menos uma equação da forma

$$ax + by + c = 0$$

em que a, b, c são números reais, onde $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ e (x, y) representa um ponto genérico de r.

Exemplos de equações da reta escrita na forma geral:

- $2x + 3y - 10 = 0$
- $-x + y + 4 = 0$
- $2x + 3y = 0$

Equação reduzida da reta

Dada a equação geral da reta r, $ax + by + c = 0$, se $b \neq 0$, temos:

$$by = -ax - c \Rightarrow y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \left(-\frac{c}{b}\right) \Rightarrow$$

$$y = mx + n$$

onde, $m = \left(-\frac{a}{b}\right)$ e $n = \left(-\frac{c}{b}\right)$.

São exemplos de equações lineares na forma reduzida:

- $y = 2x + 1$
- $y = -3x$
- $y = 4$
- $y = 10 - 100x$ (enfatizar que apesar do termo do lado direito estar em ordem diferente, o "y" continua isolado, então pela comutatividade da adição, a equação continua na forma reduzida e está na forma $y = b + ax$.

Por outro lado, estas equações lineares *não* estão na forma reduzida:

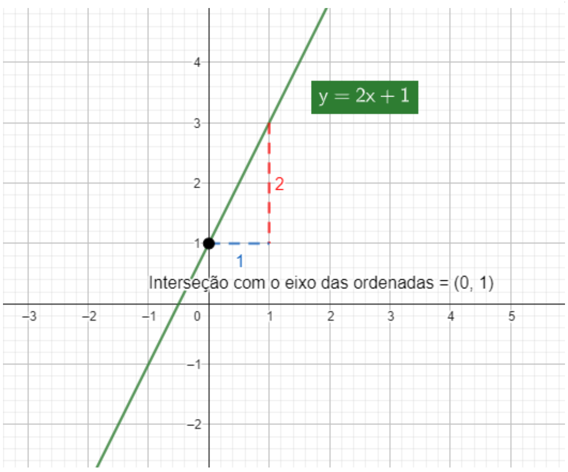
- $2x + 3y = 5$
- $y - 3 = 2(x - 1)$
- $x = 4y - 7$

A forma reduzida é uma expressão que facilita a visualização da reta no plano cartesiano, em que

- O coeficiente angular ou inclinação da reta é dado por $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- A ordenada na origem (a interseção em y) é n. Por outras palavras, a reta intercepta o eixo das ordenadas em $(0, n)$.

<u>Exemplo:</u> Construa o gráfico da reta $y = 2x + 1$.

Figura 10 – Esboço do gráfico $y = 2x + 1$



Fonte: Elaborado pelas autoras

Nesse momento, vamos mostrar os coeficientes angular e linear graficamente.

Dando sequência, questionaremos os alunos sobre como encontraríamos a equação da reta se tivéssemos apenas dois pontos dela. Por exemplo, $A = (0{,}1)$ e $B = (1{,}3)$.

Note que

$$m = \frac{3-1}{1-0} = \frac{2}{1} = 2.$$

E sabemos que uma equação da forma reduzida é do tipo $y = mx + n$. Logo, basta descobrirmos o valor de n.

Para isso, vamos substituir um dos pontos A ou B e o coeficiente angular encontrado. Escolhendo o ponto A para substituir, temos que

$$1 = 2\,.\,0 + n \Longrightarrow n = 1.$$

Portanto, a equação da reta que passa pelos pontos $A = (0{,}1)$ e $B = (1{,}3)$ é $y = 2x + 1$ como já sabíamos.

(30 minutos)

Após trabalharmos o estudo da reta, iremos realizar um jogo com os alunos para aplicação dos conceitos.

Será solicitado aos alunos que se dividam em grupos de quatro pessoas a fim de realizar a dinâmica "*Stop* da Geometria Analítica". Será entregue uma folha sulfite para cada aluno registrar seu raciocínio e três cartelas para cada grupo, todas viradas para baixo. Para iniciar a dinâmica, as estagiárias falarão "já" e cada grupo deve desvirar suas cartelas e tentar resolvê-las coletivamente. Quando um grupo terminar deve gritar "*stop*" em voz alta. Nós analisaremos as resoluções do grupo e se estiverem corretas, o grupo vence uma rodada. O grupo vencedor de cada rodada ganha um prêmio. Ao final da dinâmica, as folhas serão recolhidas e servirão como uma das ferramentas para avaliar a aprendizagem. Por fim, os alunos serão questionados em quais cartelas seu grupo teve mais dificuldade e como fizeram para resolvê-la. A partir dessas colocações, resolveremos algumas cartelas no quadro.

(35 minutos)

Por fim, caso sobre tempo, utilizaremos os conceitos trabalhados até o momento para explicar e determinar a distância entre ponto e reta.

Distância entre ponto e reta: A distância entre um ponto e uma reta é calculada unindo o próprio ponto à reta através de um segmento, que deverá formar com a reta um ângulo reto (90º). Para estabelecer a distância entre os dois necessitamos da equação geral da reta e da coordenada do ponto.

Estabelecendo a equação geral da reta $s: ax + by + c = 0$ e a coordenada do ponto $P(x_0, y_0)$, conseguimos chegar à expressão capaz de calcular a distância entre o ponto P e a reta s:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemplo: Dado o ponto $A = (3, -6)$ e $r: 4x + 6y + 2 = 0$. Estabeleça a distância entre A e r utilizando a expressão dada anteriormente.

Temos que:

$$x = 3;\ y = -6;\ a = 4, b = 6\ e\ c = 2$$

Logo, a distância entre o ponto e a reta fornecidos é igual a

$$d = \frac{|4\,.\,3 + 6\,(-6) + 2|}{\sqrt{4^2 + 6^2}} \Longrightarrow$$

$$d = \frac{|12 - 36 + 2|}{\sqrt{16 + 36}} \Longrightarrow$$

$$d = \frac{22}{\sqrt{52}} \cdot \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{52}} \Longrightarrow$$

$$d = \frac{22\sqrt{52}}{52} = \frac{11\sqrt{52}}{26}.$$

Avaliação: A avaliação ocorrerá de forma contínua no decorrer da aula, acompanhando a participação e interação dos alunos nas atividades propostas, resolução dos exercícios e a partir das anotações da dinâmica.

Referências bibliográficas

ANDRADE, Thais Marcelle de. **Matemática Interligada:** Matrizes, sistemas lineares e Geometria analítica. São Paulo: Editora Scipione, 2020.

Cartesian coordinate system in the plane from 0 to 5 on the graph grid paper. © 2003-2024 **Shutterstock**, Inc. Disponível em: https://www.shutterstock.com/pt/image-vector/cartesian-coordinate-system-plane-0-5-1149181886. Acesso em: 21 mar. 2024.

Equação reduzida da reta. **Khan Academy**. Disponível em: https://pt-pt.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:forms-of-linear-equations/x2f8bb11595b61c86:intro-to-slope-intercept-form/a/introduction-to-slope-intercept-form. Acesso em: 03 abr. 2024.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. Equação geral da reta. **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/equacao-geral-reta.htm. Acesso em: 03 abr. 2024.

OZAN, Ariadine C.; TOFFOLI, Sônia F. L.; SODRÉ, Ulysses. Matemática Essencial. **UEL**, 2020. Disponível em: https://www.uel.br/projetos/matessencial/basico/fundamental/basico.html#:~:text=Pontos%20colineares%3A%20s%C3%A3o%20pontos%20que,n%C3%A3o%20pertence%20%C3%A0%20reta%20s. Acesso em: 21 mar. 2024.

RAMOS, Luana. Noções de Geometria Analítica distância, perímetro, ponto e baricentro. **Descomplica**. Disponível em: https://descomplica.com.br/d/vs/aula/nocoes-de-geometria-analitica-distancia-perimetro-ponto-medio-e-baricentro/. Acesso em: 21 mar. 2024.

RIZZO, Maria Luiza Alves. O que é plano cartesiano? **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-plano-cartesiano.htm. Acesso em: 03 abr. 2024.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. Ponto médio de um segmento de reta. **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/ponto-medio-um-segmento-reta.htm. Acesso em: 03 abr. 2024.

Anexos

Anexo 1

Classificação de sistemas lineares

Um sistema linear é um conjunto de equações lineares, podendo ter várias incógnitas e várias equações. Existem vários métodos para resolvê-lo, independentemente da quantidade de equações. Existem três classificações para um sistema linear.

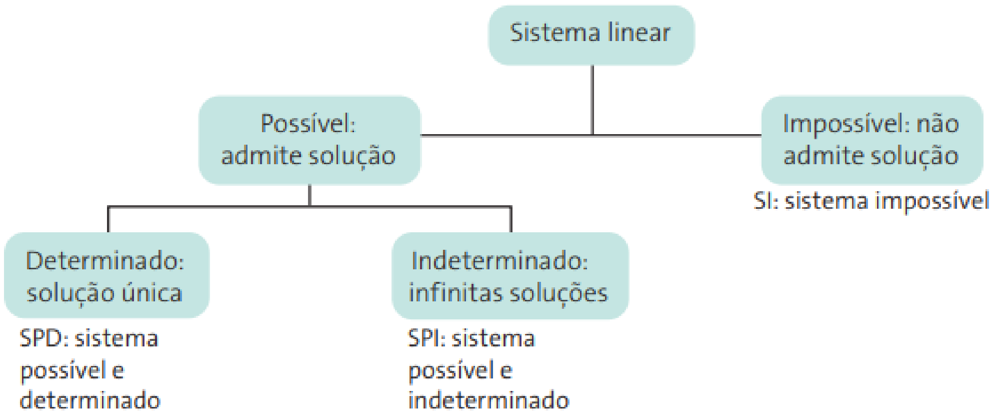
Sistema possível determinado (SPD): há apenas uma solução possível para o sistema. Para isso, o determinante principal do sistema deve ser diferente de 0.

Sistema possível indeterminado (SPI): há infinitas soluções para o sistema. Para isso, o determinante principal do sistema deve ser igual a 0, e os determinantes secundários devem ser iguais a 0.

Sistema impossível (SI): não há soluções para o sistema. Para isso, o determinante principal deve ser igual a 0, e pelo menos um determinante secundário deve ser diferente de 0.

Esquema da classificação de sistemas lineares

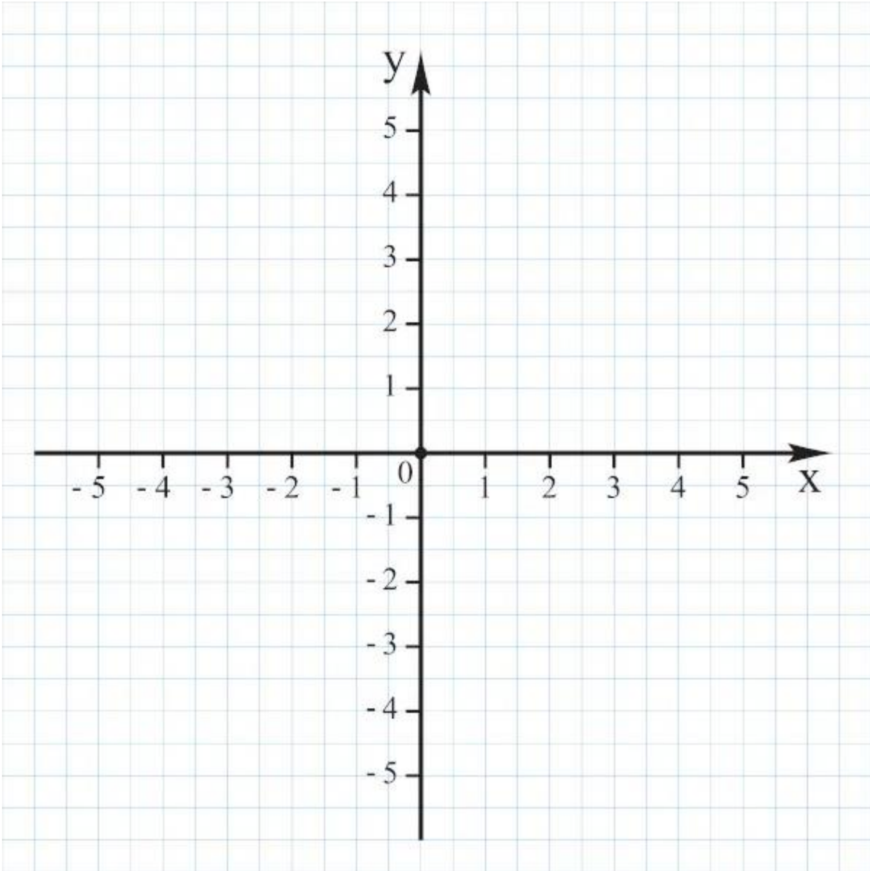
Figura 11 – Sistema de equações lineares



Fonte: Andrade, 2020.

Anexo 2

Figura 12 – Plano cartesiano



Fonte: https://www.shutterstock.com/pt/image-vector/cartesian-coordinate-system-plane-0-5-1149181886

Segmento de reta: segmento de reta é definido como uma parte da reta, o qual está delimitado por dois pontos.

Ponto médio: O ponto médio de um segmento de reta é o ponto que separa o segmento em duas partes com medidas iguais. Portanto, considerando M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, temos a seguinte expressão matemática para determinar as coordenadas de M

$$M = \left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right)$$

Exercícios

1. Marque os pontos $A = (2,3)$, $B = (-2,5)$, $C = (-3,-2)$ e $D = (1,-4)$ no plano cartesiano.

2. Encontre os pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, e $\overline{CD}$.

Pontos colineares: são pontos que pertencem a uma mesma reta.

Dados três pontos de coordenadas $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$. Eles serão colineares se

$$det(A) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Equação geral da reta: Toda reta r do plano cartesiano está associada a pelo menos uma equação da forma

$$ax + by + c = 0$$

em que a, b, c são números reais, onde $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ e (x, y) representa um ponto genérico de r.

Equação reduzida da reta: Dada a equação geral da reta $ax + by + c = 0$, se $b \neq 0$, temos que a equação reduzida da reta é

$$by = -ax - c \Longrightarrow$$

$$y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \left(-\frac{c}{b}\right) \Longrightarrow$$

$$y = mx + n.$$

onde, $m = \left(-\frac{a}{b}\right)$ é dito coeficiente angular e $n = \left(-\frac{c}{b}\right)$ é dito coeficiente linear.

8.2 **Relatório**

Relatório 06/04/2024

No dia seis de abril de 2024, às 8h06 da manhã, iniciamos o quinto encontro do Promat na sala A217, com 25 alunos.

Inicialmente, uma das estagiárias deu bom dia aos alunos, questionou como os alunos tinham passado o feriado e na sequência corrigimos dois exercícios da lista da aula anterior.

Na sequência, relembramos as formas de resolução de sistemas lineares e entregamos o material de classificação da Regra de Crammer, pois não deu tempo para trabalhar na aula anterior. Logo, realizamos a leitura do material com a participação dos alunos e explicamos a Regra de Crammer usando um exemplo, relembrando conceitos trabalhados na aula anterior e relacionando as definições do material entregue nesta aula. Neste momento, um aluno perguntou se “para encontrar a solução, sempre precisa calcular os determinantes secundários”. Então explicamos que sim, pois este cálculo é necessário para encontrar as soluções para cada variável do sistema. Ao final do exemplo, disponibilizamos um tempo para os alunos copiarem a resolução. Enquanto os alunos copiavam do quadro, entregamos o material com os principais conceitos a serem trabalhados na aula.

Uma das estagiárias começou o conteúdo da aula questionando a turma sobre a utilidade do plano cartesiano. Alguns alunos falaram suas ideias, como para marcar os pontos e algumas outras opiniões relacionadas a esta ideia, porém a maioria da turma permaneceu em silêncio. Então, a estagiária seguiu explicando sobre os quadrantes e o sinal de cada eixo, segmento de reta, ponto médio e que o eixo x é uma reta ordenada de pontos infinitos. Logo, os alunos realizaram 2 exercícios que estavam no material entregue.

Em seguida, abordamos sobre pontos colineares dando exemplo ressaltando que uma das formas de verificar se os pontos são colineares, o determinante precisa ser igual a zero. Ao final do exemplo, questionamos o que significaria se o determinante fosse diferente de zero e os alunos concluíram que não seriam colineares. As estagiárias também explicaram que de acordo com a geometria, três pontos formam um triângulo.

Na sequência, começamos a trabalhar sobre a distância entre dois pontos que não são paralelos e um aluno respondeu que poderia ser subtraindo o valor de x e y dos pontos, então mostramos que a distância que estaria calculando, seria a distância de segmentos que formariam um triângulo, então chegamos que o segmento formado pelos pontos que queremos calcular a distância, seria a hipotenusa deste triângulo e que podemos calcular usando o Teorema de Pitágoras.

No segmento da aula, realizamos a generalização usando o Teorema de Pitágoras, substituindo as incógnitas b e c, pela diferença entre os valores de x e os valores y de dois pontos. Após concluir a explicação liberamos os alunos para o intervalo.

Ao retornar, resolvemos um exemplo de como calcular o perímetro do triângulo usando a distância entre os pontos.

Neste momento, um aluno questionou se poderia chamar $\overline{AB}$ de ponto médio. Também questionaram se $\overline{AB}$ poderia ser chamada de semirreta. Então explicamos as diferenças entre segmento, ponto médio e semirreta. Ainda teve um aluno que teve dúvida sobre fatorar a $\sqrt{200}$.

Continuando, elucidamos o formato da equação geral da reta e listamos alguns exemplos no quadro, tendo a interação dos alunos. Depois, pontuamos que mesmo que esteja faltando algum termo, continua sendo a equação da reta, só que incompleta. Posteriormente, mostramos como colocar uma equação geral no formato reduzido de forma genérica. Então, um aluno apresentou dúvida relacionada ao termo b, logo explicamos que deveria ser diferente zero para que possa ser realizada a divisão.

Em seguida, apresentamos um exemplo de como construir um gráfico a partir da equação da reta dada e identificamos os coeficientes desta equação, relacionando com a definição do material entregue anteriormente. Também explicamos o que significa cada coeficiente da equação e como encontrar os coeficientes através do gráfico usando dois pontos. Ao final recapitulamos o que estava sendo abordada. Durante as explicações, dois alunos dormiram.

Uma aluna questionou se a relação entre x e y é uma progressão geométrica de ordem dois. Aproveitando o momento, outro aluno questionou o que era uma progressão geométrica. Então as estagiárias esclareceram as dúvidas e depois os alunos foram orientados para formarem grupos com quatro integrantes. Enquanto isso, uma aluna questionou se daria para resolver a equação geral usando Bháskara, então explicamos o motivo pelo qual não seria possível realizar este tipo de resolução. Seguindo, explicamos a dinâmica e ao ver as cartelas, os alunos demonstraram ficar um pouco assustados. Nisso, um aluno que é autista não quis participar da dinâmica e como avisamos que esta era a última atividade da aula, ele queria ir embora, mas ressaltamos que não poderíamos liberá-lo tão cedo sem ele apresentar uma autorização dos seus responsáveis.

Ao decorrer da dinâmica, a maioria dos alunos se empolgaram em resolver as cartelas do *Stop* da Geometria Analítica. Os alunos que respondessem todas as cartelas da rodada por primeiro falava “*stop*”. Inicialmente, a orientação passada foi de: ao falar “*stop*”, todos os alunos deveriam parar de resolver as cartelas e esperar a conferência ser realizada e caso as respostas estivessem corretas iniciaríamos uma nova rodada, com outras cartelas, mas caso estivesse alguma resposta errada, poderiam continuar resolvendo até que um grupo acertasse todas as respostas. Porém, muitas vezes falaram *stop* e a resposta não estava totalmente correta, então foi orientado que continuassem resolvendo, pois a conferência e o vencedor seriam por ordem de falar *stop*. Como premiação, cada integrante do grupo vencedor da rodada, ganhava um chocolate Bis.

Dessa forma, alguns alunos mesmo após dar o horário do encerramento da aula, quiseram continuar a resolver as cartelas para ganhar a premiação. Disponibilizamos mais alguns minutos, mas para não se prolongar muito, decidimos entregar a premiação mesmo sem concluírem, apenas pela tentativa.

9. **Encontro 6**

9.1 **Plano de aula**

Plano de aula – Encontro 6 – 13/04/2024

Estagiárias: Ana Alice de Souza, Meirielly Fernandes de Lima, Milena Maciel Romão e Stephany Amanda Parteka.

Público-alvo: Alunos inscritos no projeto de ensino e extensão Promat.

Conteúdo: Geometria analítica.

Objetivo geral: Compreender os conceitos que envolvem a geometria analítica e desenvolver estratégias de cálculo nos exercícios propostos.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com o conteúdo indicado acima, espera-se que o aluno seja capaz de:

- Calcular a distância entre ponto e reta;
- Conhecer e diferenciar as posições relativas entre duas retas, ponto e circunferência e reta e circunferência;
- Calcular a distância entre duas retas;
- Determinar a equação geral e reduzida de uma circunferência.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Lousa, giz, caderno, lápis, borracha, celular, *notebook*, projetor, *GeoGebra* e atividades impressas.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos a aula questionando os alunos sobre os conceitos trabalhados no encontro anterior e explicaremos que a aula desse sábado é uma sequência do conteúdo estudado anteriormente, ainda dentro da geometria analítica. A partir das respostas, retomaremos a equação geral da reta a fim de explicar como calcular a distância entre ponto e reta.

Equação geral da reta: Toda reta do plano cartesiano está associada a pelo menos uma equação da forma

$$ax + by + c = 0$$

em que a, b, c são números reais, onde $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ e (x, y) representa um ponto genérico de r.

Apresentaremos a definição de distância entre ponto e reta no quadro e resolveremos um exemplo com a participação da turma.

Distância entre ponto e reta: A distância entre um ponto $P = (x_0, y_0)$ e uma reta $s: ax + by + c = 0$ é dada por

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Nesse instante, vamos explicar que a distância entre um ponto e uma reta é calculada unindo o próprio ponto à reta através de um segmento, que deverá formar com a reta um ângulo reto (90º). Este segmento pertence a uma reta que é perpendicular a reta s. Para estabelecer a distância entre s e P necessitamos da equação geral da reta e da coordenada do ponto.

<u>Exemplo:</u> Dado o ponto $A = (3, -6)$ e $r: 4x + 6y + 2 = 0$. Estabeleça a distância entre A e r utilizando a expressão dada anteriormente.

Resolução:

Segundo as informações do enunciado, temos que

$$x = 3;\ y = -6;\ a = 4, b = 6 \text{ e } c = 2$$

Logo, a distância entre o ponto A e a reta r é igual a

$$d = \frac{|4\,.\,3 + 6\,.\,(-6) + 2|}{\sqrt{4^2 + 6^2}} \Longrightarrow$$

$$d = \frac{|12 - 36 + 2|}{\sqrt{16 + 36}} \Longrightarrow$$

$$d = \frac{|22|}{\sqrt{52}} \Longrightarrow d = \frac{22}{\sqrt{52}} \cdot \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{52}} \Longrightarrow d = \frac{22\sqrt{52}}{52} \Longrightarrow d = \frac{11\sqrt{52}}{26}.$$

(estimativa 20 min)

Seguidamente, vamos estimular uma discussão com a turma questionando os alunos sobre como duas retas podem interagir no plano. Em outras palavras, quais são as possibilidades de interação entre elas. Nesse momento, entregaremos um material para cada aluno (Anexo 1) com as 3 três posições relativas possíveis entre duas retas e como calcular a distância entre duas retas.

Com a participação da turma, vamos ler e explicar cada uma delas. Além disso, para auxiliar na visualização e assimilação dos conceitos, também projetaremos em slides a representação gráfica de cada um dos casos.

Posições relativas entre duas retas no plano

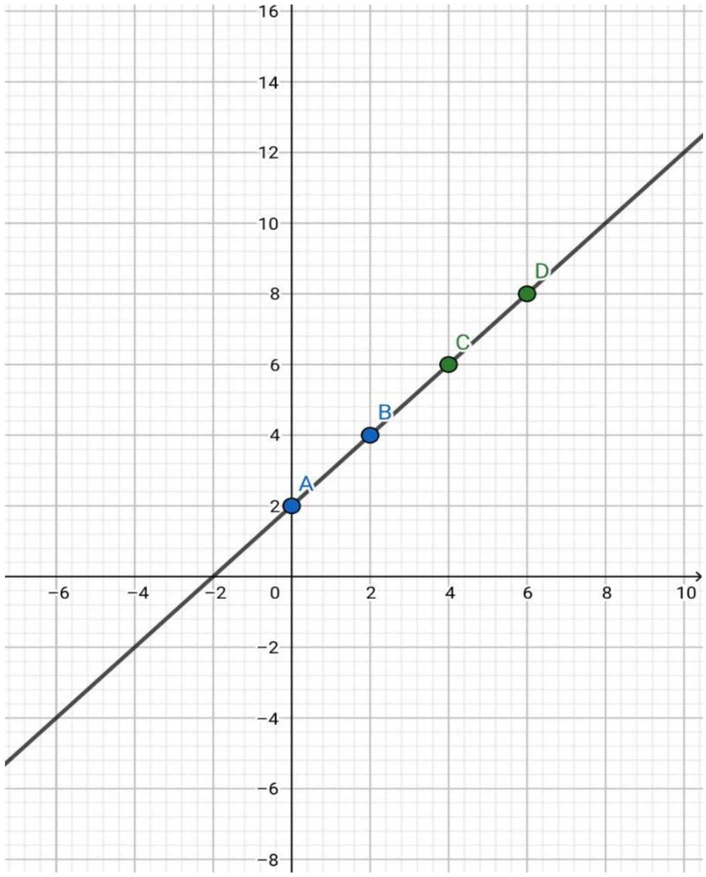
Retas paralelas e coincidentes: Duas retas são paralelas e coincidentes quando todos os pontos da primeira também são pontos da segunda e vice-versa.

Também podemos dizer que duas retas coincidentes são, na realidade, uma única reta.

Exemplo: a reta que passa pelos pontos (0,2) e (2,4) e a reta que passa pelos pontos (4,6) e (6,8) são coincidentes.

Pois, em ambos os casos a reta que passa pelos pontos é $y = x + 2$.

Figura 13 – Exemplo de retas coincidentes

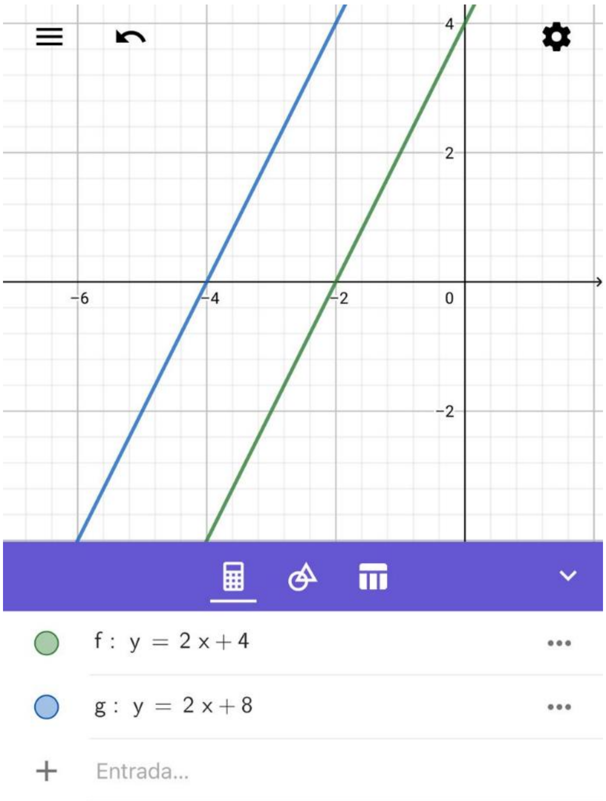


Fonte: Elaborado pelas autoras

Retas paralelas e distintas: Duas retas são paralelas e distintas quando não possuem nenhum ponto em comum em toda a sua extensão. Uma propriedade interessante sobre essas retas é que a distância entre elas sempre será a mesma, independentemente do ponto escolhido para medi-las.

Exemplo: as retas $y = 2x + 4$ e $y = 2x + 8$ são paralelas.

Figura 14 – Exemplo de retas paralelas e distintas



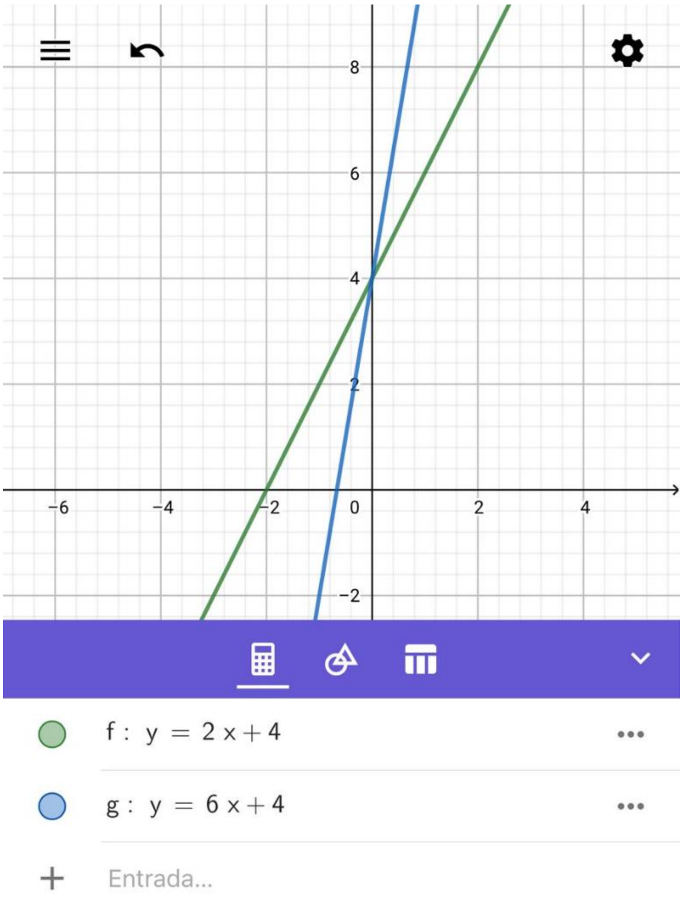
Fonte: Elaborado pelas autoras

- Duas retas são paralelas se seus coeficientes angulares são iguais. Isto é, $m_1 = m_2$.

Retas concorrentes: Duas retas são concorrentes quando possuem um único ponto de intersecção. Retas concorrentes formam quatro ângulos, congruentes dois a dois. Quando um deles mede 90°, as retas concorrentes são chamadas de perpendiculares.

<u>Exemplo:</u> as retas $y = 2x + 4$ e $y = 6x + 4$ são concorrentes no ponto (0,4), no entanto não são perpendiculares.

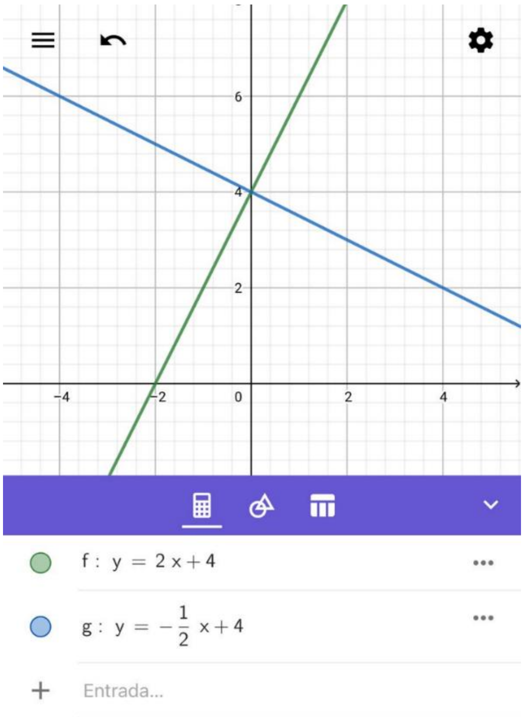
Figura 15 – Exemplo de retas concorrentes e não perpendiculares



Fonte: Elaborado pelas autoras

Exemplo: as retas $y = 2x + 4$ e $y = -\frac{1}{2}x + 4$ são concorrentes no ponto (0,4) e são perpendiculares.

Figura 16 – Exemplo de retas concorrentes e perpendiculares



Fonte: Elaborado pelas autoras

- Duas retas são perpendiculares se o produto de seus coeficientes angulares é igual a -1.

Neste instante, podemos destacar que quando duas retas são concorrentes, os ângulos formados podem ser classificados em adjacentes (ao lado) ou opostos pelo vértice. Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes e dois ângulos adjacentes são suplementares (soma é igual a 180º).

Além disso, duas retas perpendiculares sempre são concorrentes, mas nem sempre duas retas concorrentes são perpendiculares.

Também disponibilizaremos o link do *GeoGebra*: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt para os alunos que tiverem interesse em mexer e testar a plataforma. Quem não tiver acesso à internet ou celular disponível poderá acompanhar pela nossa projeção.

(estimativa 40 min)

Posteriormente, apresentaremos, nos slides, como calcular a distância entre duas retas e aplicaremos em três exemplos.

Distância entre duas retas

1º caso: se duas retas são coincidentes a distância entre elas é nula, por definição.

2º caso: as duas retas são concorrentes a distância entre elas também é nula, por definição.

3º caso: se duas retas são paralelas por definição então a distância entre elas se resume a distância entre um ponto qualquer de uma delas e a outra reta. Isto é, se resume a distância de ponto e reta já estudada anteriormente e dada por

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemplos:

1) Qual a distância entre as retas $r: y = x + 2$ e $s: -x + y - 2 = 0$?

Resolução:

As retas são $y = x + 2$ e $-x + y - 2 = 0$ são coincidentes pois são a mesma reta apenas escritas em formas diferentes (uma na forma reduzida e outra na forma geral). Logo, $d(r, s) = 0$.

2) Qual a distância entre as retas $r: y = 2x + 4$ e $s: y = -\frac{1}{2}x + 4$?

Resolução:

Como já vimos as retas r e s são perpendiculares e consequentemente, concorrentes. Logo, $d(r, s) = 0$.

3) Qual é a distância entre as retas $r: y = 3x - 4$ e $s: y = 3x - 7$?

Resolução:

Sabemos que a distância entre duas retas se reduze a calcular a distância entre um ponto de uma e a outra reta.

O ponto $P = (2, -1)$ pertence a reta $s: y = 3x + 7$, pois se substituirmos $P = (2, -1) = (x, y)$ na equação da reta temos

$$-1 = 3(2) - 7 \Rightarrow -1 = -1.$$

Logo, a distância entre duas retas se reduze a calcular a distância entre

$r: y = 3x - 4$ e $(2, -1)$ dada pela fórmula

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Escrevendo r na forma geral temos $r: 3x - y - 4 = 0$, então

$a = 3, b = -1,\ c = -4, x_0 = 2$ e $y_0 = -1$

Portanto

$$d(P, r) = \frac{|3 \,.\, 2 + (-1)(-1) + (-4)|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} \Longrightarrow$$

$$d(P, r) = \frac{|6 + 1 - 4|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Longrightarrow$$

$$d(P, r) = \frac{3}{\sqrt{10}} \,.\, \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

(estimativa 20 min)

Dando sequência a aula, explicaremos uma das definições existentes para círculo e circunferência. Neste momento, comentaremos que não existe consenso entre todos os autores.

Diferença entre círculo e circunferência: o círculo é toda a área interna de uma circunferência. Já a circunferência é apenas o contorno de um círculo.

Posteriormente, apresentaremos formalmente a definição de circunferência nos slides e apresentaremos a equação geral e reduzida da circunferência por meio de um exemplo.

Circunferência: é uma figura geométrica constituída pelo conjunto de todos os pontos igualmente distantes de um ponto fixo desse plano.

Em outras palavras, dado o ponto fixo O, um ponto A, pertencente à circunferência C, possui a mesma distância até O que um ponto B, também pertencente à circunferência C, independentemente de quais sejam os pontos A e B.

Essa distância do ponto A até o ponto O (ou do ponto B até o ponto O) é chamada de raio da circunferência e é indicada pela letra r. Já o ponto O é o ponto fixo mencionado na definição acima e é conhecido como centro da circunferência.

(estimativa 20 min)

Equação reduzida da circunferência:

Seja uma circunferência com centro $C = (a, b)$ e raio r, então a sua equação reduzida é:

$$\boldsymbol{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.}$$

Equação geral da circunferência:

Note que existem dois quadrados da diferença na equação e podemos desenvolvê-los para encontrar a equação geral da circunferência:

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

$$(y - b)^2 = y^2 - 2by + b^2$$

Substituindo na equação, temos que:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2bx + b^2 = r^2$$

Agora vamos passar o r^2 para o primeiro membro e reordenar os termos para encontrar a equação geral da circunferência:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.}$$

<u>Exemplo</u>: Encontre a equação geral e reduzida da circunferência de centro $(-1, 1)$ e raio 2.

Temos então que $a = -1$, $b = 1$ e $r = 2$. Substituindo na fórmula da equação geral:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot (-1) \cdot x - 2 \cdot 1 \cdot y + (-1)^2 + 1^2 - 2^2 = 0$$

Agora realizaremos a operação até encontrar a equação:

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 + 1 - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$$

Logo, a equação geral dessa circunferência é: $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$.

Agora, para encontrar a equação reduzida basta substituirmos na equação:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2^2$$

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4.$$

(estimativa 40 min)

Posteriormente, entregaremos uma lista (Anexo 2) com as posições relativas entre ponto e circunferência, reta e circunferência e duas circunferências. Vamos ler e explicar as classificações com a participação da turma. Ademais, as posições serão exemplificadas nos slides com imagens.

Por fim, entregaremos aos alunos uma lista de exercícios (Anexo 3), a fim de aplicar os conceitos trabalhados no encontro. Enquanto isso, circularemos pela sala tirando dúvidas. Depois e de forma estratégica, corrigiremos as questões no quadro.

(estimativa 20 min)

Avaliação: A avaliação ocorrerá ao longo da aula a partir do desenvolvimento das atividades propostas e acompanhando a participação e interação dos alunos durante as explicações e discussões.

Referências bibliográficas

Estudo do ponto e reta. **Matreemática**, 2023. Disponível em: https://lirte.pesquisa.ufabc.edu.br/matreematica/a-matematica-do-cotidiano/ramos/geometria/geometria-analitica/posicoes-entre-retas/. Acesso em: 20 mar. 2024

RABELO, Rígel. CIRCUNFERÊNCIA (PARTE 1). **Portal UFs**. Disponível em: https://daffy.ufs.br/uploads/page_attach/path/10012/Desenho_5.pdf. Acesso em: 20 mar. 2024.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. Posições relativas entre duas retas. **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/posicoes-relativas-entre-duas-retas.htm. Acesso em: 20 mar. 2024.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. O que são posições relativas? **Brasil Escola.** Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-sao-posicoes-relativas.htm. Acesso em: 20 mar. 2024.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. O que é circunferência? **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-circunferencia.htm. Acesso em: 20 mar. 2024.

Anexos:

Anexo 1

Posições relativas entre duas retas no plano

Retas paralelas e coincidentes: Duas retas são paralelas e coincidentes quando todos os pontos da primeira também são pontos da segunda e vice-versa.

Também podemos dizer que duas retas coincidentes são, na realidade, uma única reta.

<u>Exemplo:</u> a reta que passa pelos pontos (0,2) e (2,4) e a reta que passa pelos pontos (4,6) e (6,8) são coincidentes, pois nos dois casos a reta que passa pelos pontos é $y = x + 2$.

Retas paralelas e distintas: Duas retas são paralelas e distintas quando não possuem nenhum ponto em comum em toda a sua extensão. Uma propriedade interessante sobre essas retas é que a distância entre elas sempre será a mesma, independentemente do ponto escolhido para medi-las.

- Duas retas são paralelas se seus coeficientes angulares são iguais. Isto é, $m_1 = m_2$.

<u>Exemplo:</u> as retas $y = 2x + 4$ e $y = 2x + 8$ são paralelas.

Retas concorrentes: Duas retas são concorrentes quando possuem um único ponto de intersecção. Retas concorrentes formam quatro ângulos, congruentes dois a dois. Quando um deles mede 90°, as retas concorrentes são chamadas de perpendiculares.

<u>Exemplo:</u> as retas $y = 2x + 4$ e $y = 6x + 4$ são concorrentes no ponto (0,4), no entanto não são perpendiculares.

<u>Exemplo:</u> as retas $y = 2x + 4$ e $y = -\frac{1}{2}x + 4$ são concorrentes no ponto (0,4) e são perpendiculares.

- Duas retas são perpendiculares se o produto de seus coeficientes angulares é igual a -1.

Anexo 2

Posições relativas entre ponto e circunferência

Dada uma circunferência C, de centro O e raio r, e um ponto $P = (x_0, y_o)$, teremos as seguintes posições relativas:

Ponto interno: o ponto P pertence à região interna da circunferência sempre que a distância entre P e o centro O da circunferência é menor que o raio r. Em outras palavras, sempre que $d(OP) < r$.

Ponto pertencente à circunferência: o ponto P pertence à circunferência sempre que $d(OP) = r$.

Ponto exterior: um ponto P pertence à região externa da circunferência sempre que $d(OP) > r$.

Posições relativas entre reta e circunferência

Reta externa: a reta e a circunferência não possuem ponto em comum.

Reta tangente: a reta e a circunferência possuem apenas um ponto em comum.

Reta secante: a reta e a circunferência possuem dois pontos em comum.

Posições relativas entre duas circunferências

Circunferências disjuntas:

a) **Disjuntas internas:** as circunferências não possuem ponto em comum, e todos os pontos de uma delas ficam na região interior da outra.

b) **Disjuntas externas:** As circunferências não possuem ponto em comum, e todos os pontos de uma delas ficam na região exterior da outra.

Circunferências tangentes:

i) **Tangentes internas:** as circunferências possuem apenas um ponto em comum e todos os outros pontos de uma delas ficam na região interna da outra.

ii) **Tangentes externas:** as circunferências possuem apenas um ponto em comum e todos os outros pontos de uma delas ficam na região externa da outra.

Circunferências secantes: as circunferências possuem docis pontos em comum.

Anexo 3

Lista de exercícios

1. Sejam as retas: $r: y = 2x + 7$, $s: y = 2x - 5$, $t: 6x - 3y + 21 = 0$, $u: 6x + 2y = 0$. Descreva a posição relativa entre:

a) r e s

Resposta: As retas r e s são paralelas e distintas.

Note que os coeficientes angulares das duas retas são iguais, logo, elas são paralelas. Além disso são distintas, pois suas equações são distintas.

b) r e t

Resposta: As retas r e t são paralelas e coincidentes.

Colocando a reta t na forma reduzida: $t: 6x - 3y + 21 = 0 \Rightarrow -3y = -6x - 21 \Rightarrow y = -\frac{6x}{-3} - \frac{21}{-3} \Rightarrow y = 2x + 7$, logo, os coeficientes angulares da reta r e da reta s são iguais, assim, elas são paralelas. Além disso, são coincidentes pois suas equações são iguais (é a mesma reta).

c) s e u

Resposta: As retas s e u são concorrentes.

Colocando a reta u na forma reduzida: $u: 6x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{6x}{2} \Rightarrow y = -3x$. Utilizando sistema de equações lineares, temos:

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = -3x \end{cases} \Rightarrow -3x = 2x - 5 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -3$$

Logo, temos um ponto em comum entre as duas retas, assim, elas são concorrentes.

2. Para que valor de k as retas $r: y = \frac{2}{3}x + 5$ e $s: kx - 6y + 1 = 0$ são paralelas?

Resposta: $k = 4$.

A equação reduzida de uma reta qualquer no plano cartesiano pode ser dada por uma expressão na forma $y = mx + n$. Nesse caso, chamamos m de coeficiente angular da reta.

O coeficiente angular de uma reta está relacionado ao ângulo formado pela reta, em relação ao eixo x. Para determinar a posição relativa de duas retas no plano, basta analisar os coeficientes angulares:

As retas serão paralelas se os valores dos coeficientes angulares coincidirem.

Escrevendo a equação da reta s na forma reduzida

$$kx - 6y + 1 = 0 \implies$$

$$6y = kx + 1 \implies$$

$$y = \frac{k}{6}x + \frac{1}{6}.$$

Temos então que o coeficiente angular da reta r é igual a $\frac{2}{3}$ e o coeficiente angular da reta s é igual a $\frac{k}{6}$.

Portanto, r e s serão paralelas se:

$$\frac{2}{3} = \frac{k}{6}$$

$$2 . 6 = 3 . k$$

$$k = \frac{12}{3}$$

$$k = 4.$$

3. Obtenha a equação reduzida da reta r que passa pelo ponto P e é paralela à reta s nos seguintes casos:

a) $P = (-1, 4)$ e $s: y = -5x + 2$

Sabemos que a equação reduzida da reta é dada por $y = mx + n$.

Assim, para obtermos a equação reduzida da reta r, podemos observar alguns pontos:

Ela é paralela à reta s, logo, o seu coeficiente angular m, deve ser igual a -5.

$$m = -5$$

Outra observação é que o ponto P pertence a reta r, logo, P deve satisfazer sua equação. Dessa forma: $4 = -5 * (-1) + n \Rightarrow 4 = 5 + n \Rightarrow n = -1$.

Portanto, a equação reduzida de $r: y = -5x - 1$.

b) $P = (5, 0)$ e $s: 6x + 3y - 5 = 0$

Sabemos que a equação reduzida da reta é dada por $y = mx + n$.

Temos que a equação reduzida de s é:

$$3y = -6x + 5 \Rightarrow y = -2x + \frac{5}{3}.$$

Assim, para obtermos a equação reduzida da reta r, podemos observar alguns pontos:

Ela é paralela à reta s, logo, o seu coeficiente angular m, deve ser igual a -2.

$$m = -2$$

Outra observação é que o ponto P pertence a reta r, logo, P deve satisfazer sua equação. Dessa forma: $0 = -2 * (5) + n \Rightarrow n = 10$.

Portanto, a equação reduzida de $r: y = -2x + 10$.

4. Obtenha uma equação geral da reta r que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta s nos seguintes casos:

a) $P = (9, -1)$ e $s: y = 5x + 2$

Primeiramente, como as retas r e s são perpendiculares, a multiplicação dos seus coeficientes angulares é igual a -1, logo, o coeficiente angular de r será $-\frac{1}{5}$, pois $-\frac{1}{5} . 5 = -1$. Assim, a equação de r é da forma

$$y = -\frac{1}{5}x + n$$

Basta substituirmos o ponto dado para encontrar o valor de n.

$$-1 = -\frac{1}{5}(9) + n$$

$$n = -1 + \frac{9}{5} = -\frac{5}{5} + \frac{9}{5} = \frac{4}{5}$$

Portanto, a equação reduzida de $r: y = -\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$.

Passando para a forma geral temos que

$$r: + \frac{1}{5}x + y - \frac{4}{5} = 0.$$

b) $P = (-1,4)$ e $s: 2x - y - 1 = 0$

Primeiramente, vamos colocar s na forma reduzida para comparar os coeficientes angulares,

$$s: y = +2x - 1$$

como as retas r e s são perpendiculares, a multiplicação dos seus coeficientes angulares é igual a -1, logo, o coeficiente angular de r será $-\frac{1}{2}$, pois $-\frac{1}{2}.2 = -1$. Assim, a equação de r é da forma

$$y = -\frac{1}{2}x + n$$

Basta substituirmos o ponto dado para encontrar o valor de n.

$$4 = -\frac{1}{2}(-1) + n$$

$$n = 4 - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$n = \frac{7}{2}.$$

Portanto, a equação reduzida de $r: y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Passando para a forma geral temos que

$$r: \frac{1}{2}x + y - \frac{7}{2} = 0.$$

c) $P = (3,0)$ e $s: 4x - 3y + 1 = 0$

Primeiramente, vamos colocar s na forma reduzida para comparar os coeficientes angulares.

$$s: y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$$

como as retas r e s são perpendiculares, a multiplicação dos seus coeficientes angulares é igual a -1, logo, o coeficiente angular de r será $-\frac{3}{4}$, pois $-\frac{3}{4} . \frac{4}{3} = -1$. Assim, a equação de r é da forma

$$y = -\frac{3}{4}x + n$$

Basta substituirmos o ponto dado para encontrar o valor de n.

$$0 = -\frac{3}{4}(3) + n$$

$$n = \frac{9}{4}$$

Portanto, a equação reduzida de $r: y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$.

Passando para a forma geral temos que

$$r: \frac{3}{4}x + y - \frac{9}{4} = 0.$$

5. O centro de uma circunferência é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, sendo $A = (4; -7)$ e $B = (-8; -3)$. Se o raio dessa circunferência é 3, determine sua equação.

Calculando o centro C através da equação do ponto médio de um segmento:

Coordenadas $A(4; -7)$ e $B(-8; -3)$.

$$C = \left(\frac{-8+4}{2}; \frac{-3+(-7)}{2}\right) = (-2; -5).$$

De acordo com a lei de formação da equação de uma circunferência $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, temos que de acordo com o ponto médio o centro da circunferência é $(-2; -5)$, isto é,

$a = -2$ e $b = -5$. Então:

$$(x+2)^2+(y+5)^2=3^2$$

$$(x+2)^2+(y+5)^2=9$$

A equação da circunferência é dada por $(x+2)^2+(y+5)^2=9$.

6. (PUC-SP) O ponto $P=(3,b)$ pertence à circunferência de centro no ponto $C=(0,3)$ e raio 5. Calcule o valor da coordenada b.

A equação reduzida da circunferência que possui centro $C(0,3)$ e raio $r = 5$ é dada por:

$$(x-0)^2+(y-3)^2=5^2 \Rightarrow x^2+(y-3)^2=25$$

Sabendo que o ponto $(3,b)$ pertence à circunferência, temos que:

$$3^2+(b-3)^2=25 \Rightarrow (b-3)^2=25-9 \Rightarrow b-3=\sqrt{16} \Rightarrow b=\pm 4+3 \Rightarrow$$

$$b=4+3=7 \text{ ou } b=-4+3=-1.$$

Logo, o valor da coordenada b pode ser -1 ou 7.

7. (FEI-SP) Determine a equação da circunferência com centro no ponto $C=(2,1)$ e que passa pelo ponto $A=(1,1)$.

Sabendo que o ponto $A=(1\,,1)$ pertence à circunferência e que o centro possui coordenadas $C=(2,1)$, temos que a distância entre A e C é o raio da circunferência. Dessa forma temos que $d(A,C) = r$:

$$d(A,C)=\sqrt{(1-2)^2+(1-1)^2}=\sqrt{1+0}=1.$$

Se o raio da circunferência é igual a 1 e o centro é dado por $(2,1)$, temos que a equação da circunferência é dada por:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=1.$$

8. Temos que duas circunferências de equações $\lambda_1: x^2+y^2=16$ e $\lambda_2: x^2+y^2+4y=0$ são tangentes, isto é, possuem um ponto em comum. Determine a coordenada desse ponto.

Resolver o sistema de equações: $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ x^2+y^2+4y=0 \end{cases}$

Temos pela 1ª equação que $x^2 + y^2 = 16$, então:

$$x^2 + y^2 + 4y = 0 \Rightarrow 16 + 4y = 0 \Rightarrow y = -\frac{16}{4} = -4.$$

Assim, $x^2 + (-4)^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 16 - 16 \Rightarrow x = 0.$

Logo, o ponto de intersecção das circunferências é $(0, -4)$.

9. Verifique o posicionamento da reta r, dada pela equação $2x + y - 1 = 0$ em relação à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$.

Determinar as coordenadas do centro da circunferência é a medida do raio:

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + y^2 - 8y = 0$$

Observe que em $x^2 + 6x$ precisamos fazer o completamento do trinômio:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

E em $y^2 - 8y$ completando o trinômio:

$$y^2 - 8y + 16 = (y - 4)^2$$

Então, temos:

$$x^2 + 6x + y^2 - 8y = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 9 + 16 \Rightarrow (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

A equação reduzida da circunferência é dada por $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Sendo assim,

Coordenadas do centro: $(-3; 4) = (x_0, y_0)$

Medida do raio: 5

Determinando a distância entre o centro e a reta r: $2x + y - 1 = 0$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \frac{|2 * (-3) + 1 * (4) - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \Rightarrow \frac{|-6 + 4 - 1|}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{3}{2.2} \cong 1.36$$

Temos que a distância é menor que o raio, pois $1.36 < 5$. Dessa forma, a reta é secante à circunferência.

9.2 **Relatório**

Relatório 13/04/2024

No dia treze de abril de 2024, às 8h10, realizamos o sexto encontro do Promat na sala A217, com 20 alunos. Cinco deles chegaram depois que iniciamos.

Comentamos, primeiramente, sobre o conteúdo da aula passada, geometria analítica, e que essa aula seria uma continuação dela. Questionamos aos alunos o que acharam da dinâmica feita no último encontro, o jogo *stop*. A maioria disse que encontrar a resposta de algumas cartelas foi desafiador, mas eles se divertiram e sanaram muitas dúvidas. Eles também responderam que a maior dificuldade foi encontrar a equação da reta a partir do gráfico e a maior facilidade foi verificar se três pontos eram colineares por meio do cálculo do determinante.

Para o início do conteúdo, retomamos alguns conceitos sobre a equação da reta, para explicar sobre como calculamos a distância entre ponto e reta. Escrevemos um exemplo com a fórmula no quadro, e chegamos em um momento em que perguntamos aos alunos sobre multiplicar a fração para tirar a raiz do denominador, ou seja, o processo de racionalizar. Um aluno respondeu, mas sem convicção, e explicamos que não é conveniente ter números irracionais no denominador de uma fração e mostramos como fazemos isso. Ainda no exemplo, questionamos sobre o módulo da fórmula e como o resolvemos. O mesmo aluno dessa vez explicou corretamente como calcular, dizendo que o módulo indica um valor positivo pois estamos abordando distância.

Dando sequência, explanamos sobre as posições relativas entre duas retas, fornecendo o material impresso em que descrevia cada caso e projetando os *slides* para melhor visualização de cada um. Voltamos a comentar sobre a distância entre ponto e reta, explicando a representação gráfica presente no *slide*. Acreditamos que essa foi uma das causas que, mais tarde, levou à confusão dos alunos com as fórmulas na lista de exercícios, pois regressamos a um conceito anteriormente exposto no meio da explicação de outro.

Seguidamente, abrimos e projetamos a interface do Geogebra para mostrar quando duas retas são coincidentes. Mostramos algumas funções e ferramentas que o *software* possui e disponibilizamos o *link* para que os alunos interagissem com ele também. Como eles não tinham conhecimento de como usar as ferramentas ou a caixa de texto, a interação não durou muito tempo.

Explicamos os demais casos de posição relativa entre duas retas com as representações nos slides e usamos um exemplo em quadro de como calcular a distância entre duas retas.

Até esse momento os alunos estavam silenciosos e pouco participativos, apresentavam apatia e, aparentemente, dois deles estavam sonolentos. Na maioria das vezes, apenas dois alunos respondiam os questionamentos feitos por nós, por exemplo, quando perguntamos sobre como encontramos o ponto em comum entre duas retas concorrentes, referenciando um dos encontros passados (quarto encontro) em que abordamos sistemas lineares.

O intervalo ocorreu das 09h39 às 10h06. Os alunos voltaram do intervalo aparentemente mais despertos.

Para essa segunda parte da aula, começamos a apresentar sobre a circunferência e o círculo e como diferenciá-los. Destacamos que não existe um consenso entre autores sobre as definições de cada um. Escrevemos as equações geral e reduzida da circunferência no quadro e utilizamos um exemplo de como encontrá-las dado o centro e o raio. A maioria dos alunos já tinham visto essas equações na escola, mas não recordavam como eram as fórmulas. Informamos que todo esse conteúdo aparecia com bastante frequência em provas do Enem e vestibulares, pois abordava tanto o visual quanto a interpretação do participante.

Após isso, comentamos sobre as posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências, com uma participação mais ativa dos alunos. A exposição dos casos por meio dos *slides* forneceu uma visão mais clara aos alunos, que estavam fazendo anotações sobre.

Os últimos trinta minutos de aula ficaram reservados para os alunos colocarem em prática o que expomos nessa aula e resolver a lista de exercícios. Entretanto, mesmo após uma breve leitura coletiva e explicações, os alunos não estavam muito entusiasmados para iniciar e começar a resolver.

Estivemos caminhando pela sala para auxiliá-los em possíveis dúvidas e percebemos que alguns alunos tinham bastante dificuldade com a transformação de uma forma de equação para outra, conteúdo trabalhado no último encontro. A lista de exercícios abordava conteúdo da aula passada também, então acreditamos que os alunos estavam se confundindo com as diversas fórmulas e na interpretação do que se pedia no exercício.

Com o final da aula se aproximando não foi possível realizar a correção coletiva dos exercícios visto as dificuldades dos alunos. Assim, pensamos ser melhor fazer a correção no próximo encontro, mas informamos a todos que forneceríamos a resolução ao longo da semana.

10. **Encontro 7**

10.1 **Plano de aula**

Plano de aula – Encontro 7 – 20/04/2024

Público-alvo: Alunos inscritos no projeto de ensino e extensão Promat.

Conteúdo: Trigonometria.

Objetivo geral: Compreender os conceitos que envolvem trigonometria e desenvolver estratégias de cálculo nos exercícios propostos.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com o conteúdo indicado acima, espera-se que o aluno seja capaz de:

- Relacionar triângulos às relações trigonométricas;
- Calcular e diferenciar as relações trigonométricas;
- Determinar soma e subtração de arcos;
- Relacionar e converter as unidades de medidas de ângulos.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Lousa, giz, caderno, lápis, borracha e atividades impressas, baralho do jogo Pife trigonométrico.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos o encontro questionando os alunos a respeito da lista de exercícios sobre o conteúdo de geometria analítica entregue na aula anterior, pois percebemos muitas dúvidas durante sua resolução. Com acesso à resolução da lista (que foi fornecida durante a semana), esperamos que os discentes possam ter comparado os resultados e fixado os conceitos. De toda forma, resolveremos três dos exercícios propostos no quadro.

1. Sejam as retas: $r: y = 2x + 7$, $s: y = 2x - 5$, $t: 6x - 3y + 21 = 0$, $u: 6x + 2y = 0$. Descreva a posição relativa entre:

a) r e s

Resposta: As retas r e s são paralelas e distintas.

Note que os coeficientes angulares das duas retas são iguais, logo, elas são paralelas. Além disso são distintas, pois suas equações são distintas.

b) r e t

Resposta: As retas r e t são paralelas e coincidentes.

Colocando a reta t na forma reduzida: $t: 6x - 3y + 21 = 0 \Rightarrow -3y = -6x - 21 \Rightarrow y = -\frac{6x}{-3} - \frac{21}{-3} \Rightarrow y = 2x + 7$, logo, os coeficientes angulares da reta r e da reta s são iguais, assim, elas são paralelas. Além disso, são coincidentes pois suas equações são iguais (é a mesma reta).

c) s e u

Resposta: As retas s e u são concorrentes.

Colocando a reta u na forma reduzida: $u: 6x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{6x}{2} \Rightarrow y = -3x$. Utilizando sistema de equações lineares, temos:

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = -3x \end{cases} \Rightarrow -3x = 2x - 5 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -3$$

Logo, temos um ponto em comum entre as duas retas, assim, elas são concorrentes.

3. Obtenha a equação reduzida da reta r que passa pelo ponto P e é paralela à reta s nos seguintes casos:

a) $P = (-1, 4)$ e $s: y = -5x + 2$

Sabemos que a equação reduzida da reta é dada por $y = mx + n$.

Assim, para obtermos a equação reduzida da reta r, podemos observar alguns pontos:

Ela é paralela à reta s, logo, o seu coeficiente angular m, deve ser igual a -5.

$$m = -5$$

Outra observação é que o ponto P pertence a reta r, logo, P deve satisfazer sua equação. Dessa forma: $4 = -5 * (-1) + n \Rightarrow 4 = 5 + n \Rightarrow n = -1$.

Portanto, a equação reduzida de $r: y = -5x - 1$.

4. Obtenha uma equação geral da reta r que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta s nos seguintes casos:

a) $P = (9, -1)$ e $s: y = 5x + 2$

Primeiramente, como as retas r e s são perpendiculares, a multiplicação dos seus coeficientes angulares é igual a -1, logo, o coeficiente angular de r será $-\frac{1}{5}$, pois $-\frac{1}{5} . 5 = -1$. Assim, a equação de r é da forma

$$y = -\frac{1}{5}x + n$$

Basta substituirmos o ponto dado para encontrar o valor de n.

$$-1 = -\frac{1}{5}(9) + n$$

$$n = -1 + \frac{9}{5} = -\frac{5}{5} + \frac{9}{5} = \frac{4}{5}$$

Portanto, a equação reduzida de $r: y = -\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$.

Passando para a forma geral temos que

$$r: + \frac{1}{5}x + y - \frac{4}{5} = 0.$$

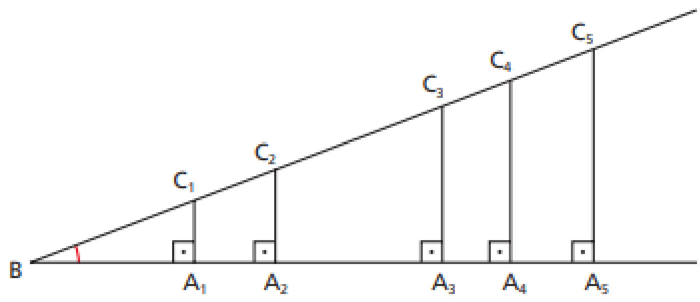
Dando sequência, para trabalhar o conteúdo desse encontro, começaremos a abordar trigonometria perguntando aos alunos o que eles lembram/sabem sobre o assunto. Com as respostas, explicaremos que a trigonometria estuda as relações entre os lados de um triângulo e os seus ângulos.

Assim, demonstraremos no quadro como funciona a trigonometria em um triângulo retângulo.

Trigonometria no triângulo retângulo

Dado um ângulo agudo $\hat{B}$, vamos marcar sobre um de seus lados os pontos $A_1, A_2, A_3, \dots$ e vamos conduzir, por eles, as perpendiculares $\overline{A_1C_1}, \overline{A_2C_2}, \overline{A_3C_3}, \dots$ (conforme figura abaixo).

Figura 17 – Triângulos retângulos semelhantes



Fonte: Iezzi (2013)

Os triângulos $BA_1C_1, BA_2C_2, BA_3C_3 \dots$ são todos semelhantes entre si. Então decorrem as seguintes relações:

$$\frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \frac{A_3C_3}{BC_3} = \cdots$$

(fixado $\hat{B}$, o cateto oposto a $\hat{B}$ e a hipotenusa são diretamente proporcionais)

$$\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \frac{BA_3}{BC_3} = \cdots$$

(fixado $\hat{B}$, o cateto adjacente a $\hat{B}$ e a hipotenusa são diretamente proporcionais)

$$\frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BA_2} = \frac{A_3C_3}{BA_3} = \cdots$$

(fixado $\hat{B}$, os catetos oposto e adjacente a $\hat{B}$ são diretamente proporcionais)

$$\frac{BA_1}{A_1C_1} = \frac{BA_2}{A_2C_2} = \frac{BA_3}{A_3C_3} = \cdots$$

(fixado $\hat{B}$, os catetos adjacente e oposto a $\hat{B}$ são diretamente proporcionais)

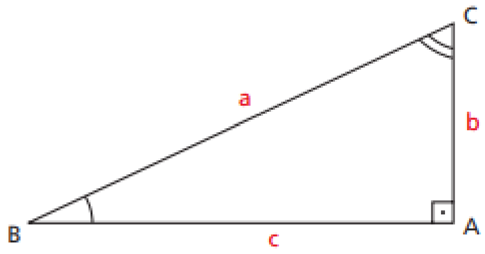
Essas relações não dependem do tamanho dos triângulos ΔBA_1C_1, ΔBA_2C_2, $\Delta BA_3C_3, \dots$ mas dependem apenas do valor do ângulo $\hat{B}$.

Por meio dessas relações, apresentaremos os conceitos de seno, cosseno e tangente.

Seno, Cosseno e Tangente

Considere o triângulo retângulo:

Figura 18 – Triângulo retângulo ABC



Fonte: Iezzi (2013)

Fixando um ângulo agudo $\hat{B}$, temos as seguintes relações:

1) Seno de um ângulo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

$$sen\ \hat{B} = \frac{CO}{HIP} = \frac{b}{a}$$

2) Cosseno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.

$$\cos \hat{B} = \frac{CA}{HIP} = \frac{c}{a}$$

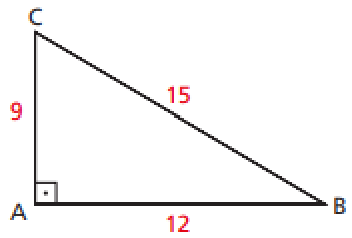
3) Tangente de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo.

$$tg\ \hat{B} = \frac{CO}{CA}$$

Faremos um exemplo no quadro de como calcular os valores de seno, cosseno e tangente.

Exemplo 1**:** Dado o triângulo ABC, retângulo em A, calcule $sen\ \hat{B}, \cos \hat{B}, tg\ \hat{B}$.

Figura 19 – Triângulo retângulo exemplo 1



Fonte: Iezzi (2013)

$$sen\ \hat{B} = \frac{CO}{HIP} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\cos \hat{B} = \frac{CA}{HIP} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$tg\ \hat{B} = \frac{CO}{CA} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

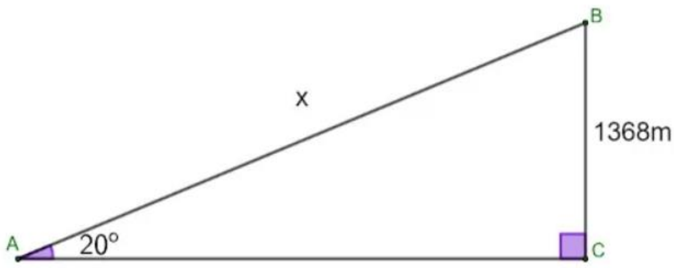
<u>Exemplo 2:</u> Um avião levantou voo, formando um ângulo de 20º com o solo, e atingiu uma altura de 1368 metros. A distância percorrida pelo avião, em metros quadrados, foi de:

(Use: sen 20º = 0,342; cos 20º = 0,94; tg 20º = 0,364)

Resolução:

Primeiro construiremos a imagem que representa a situação:

Figura 20 – Triângulo exemplo 2



Fonte: https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-razoes-trigonometricas.htm#resposta-7001

A razão trigonométrica que relaciona cateto oposto e hipotenusa é o seno, então, temos que:

$$sen\ 20^{o} = \frac{1368}{x}$$

$$0{,}342 = \frac{1368}{x}$$

$$0{,}342\,x = 1368$$

$$x = \frac{1368}{0{,}352} \cong 3.886\,m$$

Ângulos

Dando continuidade, apresentaremos os ângulos notáveis (30°, 45° e 60°), que são ângulos de destaque na geometria e trigonometria por aparecerem com frequência em problemas matemáticos.

Razões trigonométricas dos ângulos notáveis

Vamos obter as razões trigonométricas dos ângulos notáveis. Para isso, comentaremos sobre uma paródia considerada um macete matemático para construir a tabela com as razões trigonométricas dos ângulos notáveis.

Observação: Canta-se com a entonação da música Tindolelê, de Xuxa.

“Todo mundo um, dois, três
Um, dois, três
Todo mundo três, dois, um
Três, dois, um
Todo mundo sobre dois
Todo mundo sobre dois
Raiz no numerador onde não tem um”.

“A tangente é diferente vejam só vocês

raiz de três sobre três, um, raiz de três”.

Complementaremos dizendo que, para encontrar os valores da tangente, devemos calcular seno sobre cosseno. Abaixo está a tabela completa dos ângulos notáveis.

Tabela trigonométrica dos ângulos notáveis

Figura 21 – Tabela dos ângulos notáveis

Ângulos	**30°**	**45°**	**60°**
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Elaborado pelas autoras

Em seguida, proporemos o jogo **Pife trigonométrico**, a fim de trabalhar com as relações entre ângulos, relações trigonométricas e triângulos.

Pife trigonométrico – Regras do jogo e como jogar:

- O jogo é composto por um baralho com 49 cartas (Anexo 1);
- Pode ser jogado por grupos de 2 a 6 pessoas;
- Um jogador deve embaralhar as cartas e um outro jogador deverá distribuir as cartas;
- São seis cartas para cada participante (sugestão de distribuição: uma carta por vez para cada jogador);
- Das seis cartas recebidas, cada jogador deve formar duas trincas, de razões trigonométricas equivalentes. Exemplo: caso o jogador faça um jogo com as razões do seno 30°: a medida do cateto oposto (30°) dividido pela medida da hipotenusa = 30° = ½;
- A carta triângulo (com ângulos de 30°, 60° e 90°) será um coringa da razão acima, podendo substituir uma carta, assim completando a terna.
- O jogador que fizer dois trios ou um trio e relacionar as outras quatro cartas primeiro soma um ponto. Ganha aquele jogador que fizer cinco pontos primeiro.

Durante a realização do jogo, caminharemos pela sala de aula para sanar possíveis dúvidas no decorrer da interação dos alunos com as cartas.

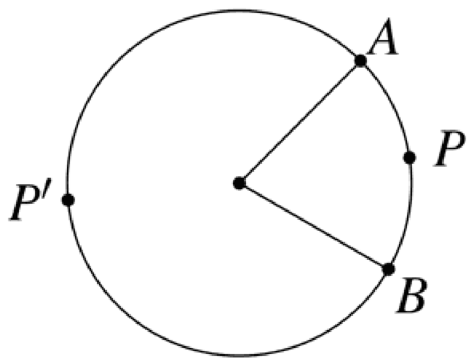
Depois de finalizado o jogo, questionaremos aos alunos o que acharam sobre, se gostaram dessa variação de um jogo muito conhecido de cartas, quais as dificuldades, facilidades e se, através dele, os auxiliaram a compreender o conteúdo exposto.

Seguindo adiante, apresentaremos o conceito de arco.

Arcos

Dados dois pontos A e B em uma circunferência, tomemos um terceiro ponto entre elas denotado por P, e um quarto ponto P':

Figura 22 – Arco de circunferência



Fonte: Manual do Enem (2022)

A circunferência foi dividida em duas regiões: aquela de A até B que contém P, e a outra de A até B que contém P'. Para tais regiões damos os nomes de **arcos** da circunferência. Neste caso, temos os arcos APB e AP'B. Os pontos A e B são os extremos do arco.

Soma e subtração de arcos

Conhecendo-se as relações trigonométricas dentro de dois arcos (a e b), as operações de soma e subtração podem ser efetuadas a partir de algumas fórmulas.

Seno da soma e subtração entre arcos:

$$sen(a + b) = sen\ a \cdot \cos b + sen\ a \cdot \cos b$$

$$sen(a - b) = sen\ a \cdot \cos b - sen\ a \cdot \cos b$$

Cosseno da soma e subtração entre arcos:

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - sen\ a \cdot sen\ b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + sen\ a \cdot sen\ b$$

Tangente da soma e subtração entre arcos:

$$tg(a+b) = \frac{tg\ a + tg\ b}{1 - tg\ a \cdot tg\ b}$$

$$tg(a-b) = \frac{tg\ a - tg\ b}{1 + tg\ a \cdot tg\ b}$$

Faremos um exemplo no quadro sobre soma e subtração de arcos.

<u>Exemplo:</u> Se $a = 30°$ e $b = 45°$, vamos calcular:

a) $sen(a+b)$

b) $sen(a-b)$

c) $\cos(a+b)$

Resolução:

$$sen(30° + 45°) = sen\ 30° \cdot \cos 45° + sen\ 45° \cdot \cos 30°$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$sen\ (30° - 45°) = sen\ 30° \cdot \cos 45° - sen\ 45° \cdot \cos 30°$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos(30° + 45°) = \cos 30° \cdot \cos 45\,° - sen\ 30° \cdot sen\ 45°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Em seguida, apresentaremos as unidades de medida utilizadas para representar os ângulos.

Unidades de medidas

As unidades mais utilizadas para medir ângulos são o **grau** e o **radiano**. Escreveremos ambas as definições no quadro.

Definição de grau: Um grau (símbolo: °) corresponde à medida de um arco cujo comprimento é igual a $\frac{1}{360}$ do comprimento da circunferência que está sendo considerada.

Definição de radiano: Um radiano (símbolo: rad) corresponde à medida de um arco que tem o mesmo comprimento do raio da circunferência que está sendo considerada.

Comentaremos que, considerando uma circunferência cujo raio tenha medida r, como o comprimento dessa circunferência é $2\pi r$, podemos obter sua medida x, em radiano, por meio de uma regra de três:

Medida do arco ---- Comprimento do arco

$$1\,rad \,\_\_\_\_\_\; r$$

$$x \,\_\_\_\_\_\; 2\pi r$$

Além disso, explicaremos que uma medida em radiano é equivalente a uma medida em grau se ambas forem medidas de um mesmo arco. Por exemplo, $2\pi\,rad$ é equivalente a 360°, pois são medidas de um arco de uma volta completa.

Vamos utilizar um exemplo no quadro para mostrar como fazemos a conversão de grau para radiano e vice-versa.

<u>Exemplo:</u> Como converter 150° para radianos? E de radianos para graus?

Resolução: Fazendo por regra de três, temos:

$$150° \rightarrow x\,rad$$

$$180° \rightarrow \pi\,rad$$

$$x\,rad = \frac{150\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$$

Para voltar, transformar de radianos para graus, substituímos π = 180°:

$$\frac{5\pi}{6} = \frac{5 \cdot 180}{6} = 5 \cdot 30 = 150°$$

Posteriormente, entregaremos uma lista de exercícios (Anexo 2) aos alunos para prática e fixação dos conceitos trabalhados no encontro. Enquanto isso, circularemos pela sala de aula para auxiliá-los e tirar dúvidas. A correção dos exercícios se dará no próximo encontro.

Avaliação: A avaliação ocorrerá ao longo da aula a partir do desenvolvimento das atividades propostas e acompanhamento da participação e interação dos alunos durante as explicações e discussões.

Referências:

ARANTES, Janildo. **Blog Janildo Arantes**. Disponível em: https://www.professorjanildoarantes.com.br/2022/06/trigonometria-pedro-localizado-8-metros.html. Acesso em: 16 abr. 2024.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar**: Trigonometria. 9ª ed. São Paulo. Editora Atual, 2013.

MOLTER, Alexandre; NACHTIGALL, Cícero; ZAHN, Maurício. **Trigonometria e números complexos**: com aplicações. São Paulo. Editora Blucher, 2020.

No triangulo abc retangulo em a,b=35graus e c= 4cm,quais sao os valores de a de b? **Brainly**. Disponível em: https://brainly.com.br/tarefa/14991859. Acesso em: 16 abr. 204.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. Exercícios sobre razões trigonométricas. **Mundo Educação**. Disponível em: https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-razoes-trigonometricas.htm#resposta-7001. Acesso em: 16 abr. 2024.

PAIVA, Manoel. **Matemática 1**: Paiva. 2ª ed. São Paulo. Editora Moderna Plus, 2010.

SANTOS, Thamires. Fórmulas trigonométricas. **Educa Mais Brasil**, 4 abr. 2019. Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/formulas-trigonometricas. Acesso em: 16 abr. 2024.

TOFFOLI, Sônia Ferreira Lopes; SODRÉ, Ulysses. Trigonometria: Exercícios de soma e diferença de arcos. **Matemática Essencial**, 29 jul. 2020. Disponível em: https://www.uel.br/projetos/matessencial/basico/trigonometria/trigo06a.html. Acesso em: 16 abr. 2024.

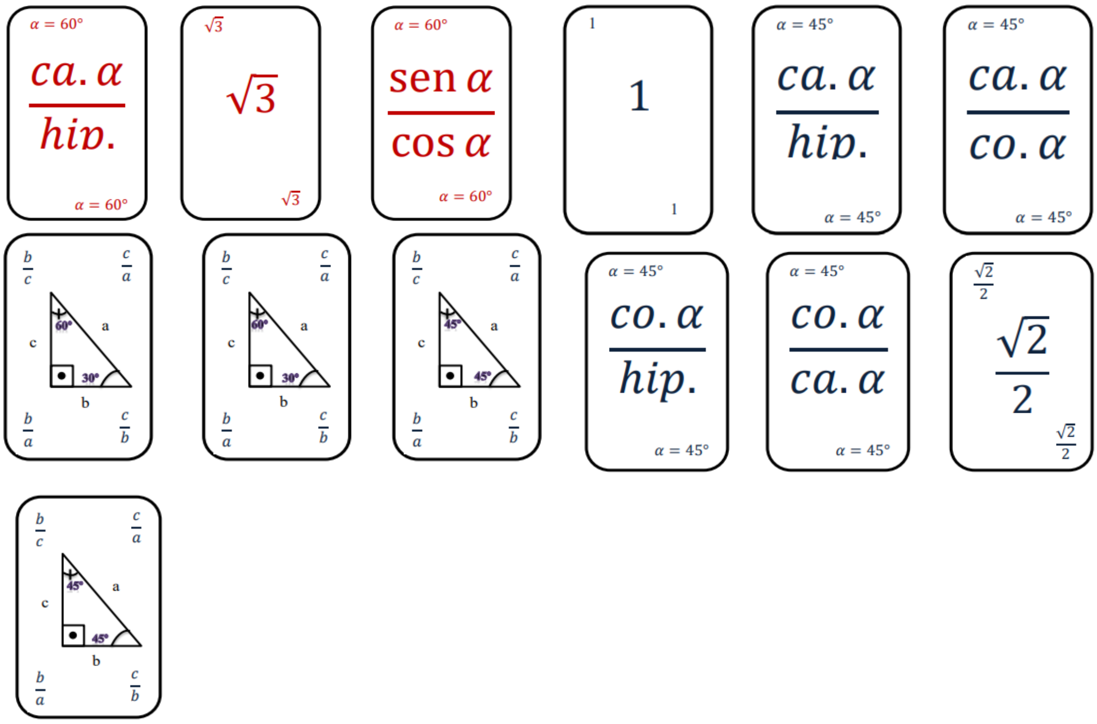
VINICIUS, Marcus. Arcos e ângulos. **Quero bolsa**, 28 jul. 2022. Disponível em: https://querobolsa.com.br/enem/matematica/arcos-e-angulos. Acesso em: 14 abr. 2024.

ZEFERINO, Leandro. **Jogos Matemáticos nas Aulas do Ensino Médio**: Pife-Trigonométrico. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. São Paulo, p. 56. 2015.

Anexos

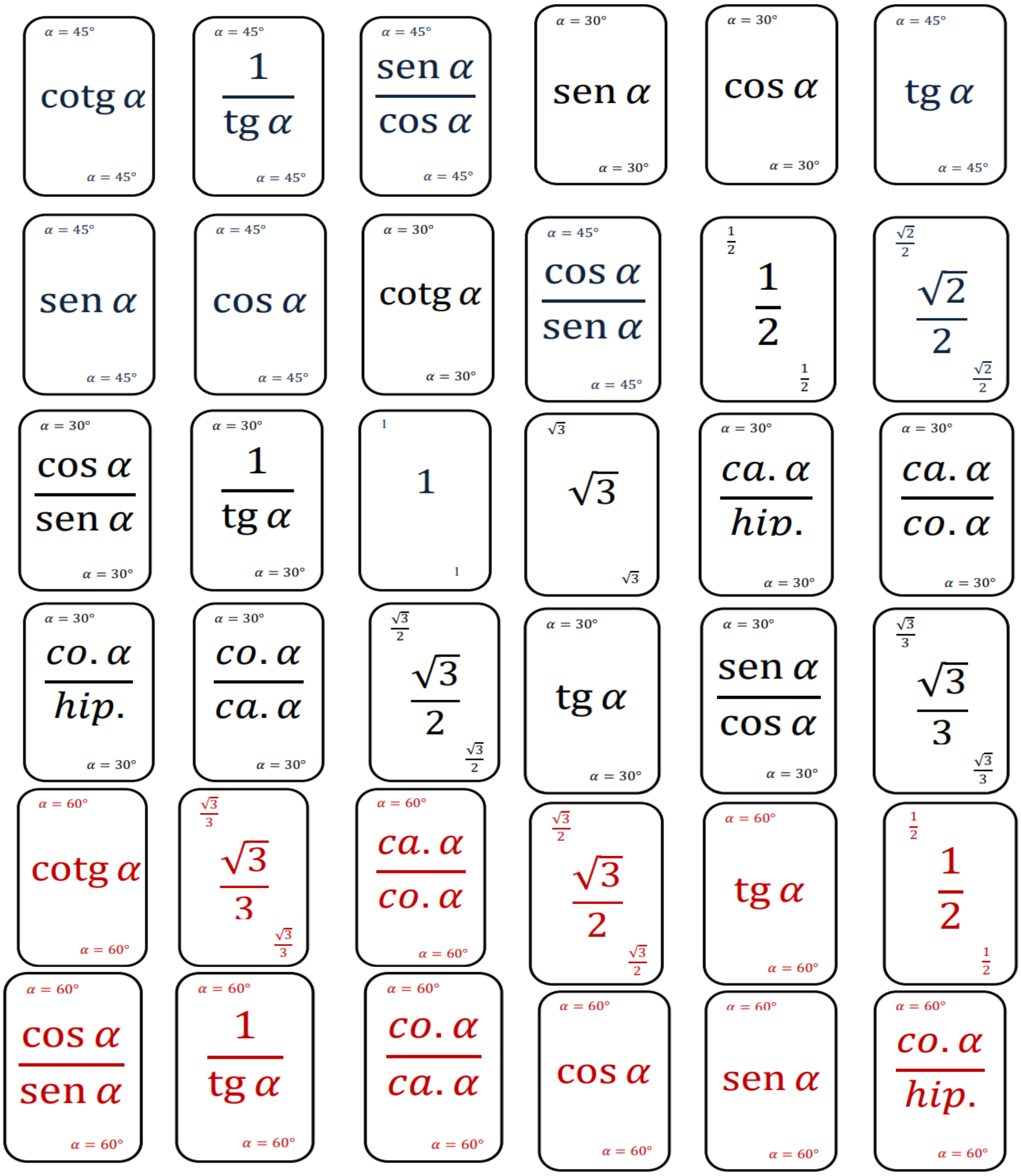
Anexo 1

Figura 23 – Cartas do bife trigonométrico



Fonte: Zeferino (2015)

Figura 24 – Cartelas jogo



Fonte: Zeferino (2015)

Anexo 2

Lista de Exercícios

1. Sabemos que a medida de 180° equivale a π radianos. Determine qual valor em radianos corresponde a 1° e, também, qual valor em graus é correspondente a 1 radiano.

Resolução:

Primeiramente, vamos utilizar regra de três simples para fazer a transformação de 1° em radianos:

180º____ π rad

1º____ x

180 $x = 1\,\pi$

$$x = \frac{\pi}{180}$$

Podemos ainda estabelecer um valor aproximado se considerarmos que $\pi \cong$ 3,1415

$$x \cong \frac{3{,}1415}{180}$$

$$x \cong 0{,}01745.$$

Novamente utilizando regra de três, vamos verificar qual é a medida em graus que corresponde ao valor de 1 rad:

180º____ π rad

x____ 1 rad

$$\pi\, x = 180$$

$$x = \frac{180}{\pi}$$

$x \cong 57{,}29$º.

2. Determine, em radianos, a medida do ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 4 horas.

Resolução:

Se uma volta no relógio possui 360°, temos que 360/12 = 30°, ou seja, a cada hora o ponteiro das horas anda 30° graus. Para 4 horas temos 4 · 30° = 120°.

Fazendo por regra de três, temos:

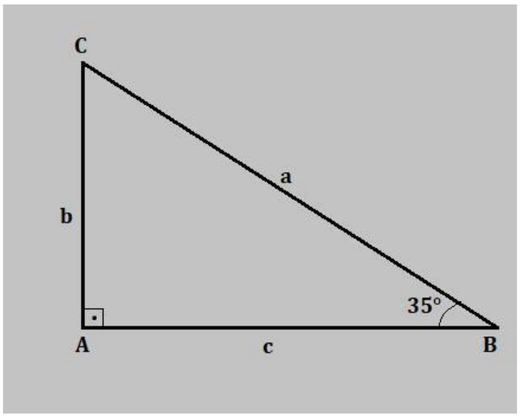
$$120° \;\rightarrow x\, rad$$

$$180° \rightarrow \pi\, rad$$

$$x\,rad = \frac{120\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}.$$

3. No ΔABC, retângulo em A, $\hat{B} = 35°$ e $c = 4\ cm$. Calcule os valores de a e b.

Figura 25 – Triângulo retângulo exercício 3



Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/14991859

Resolução:

Para encontrar a, que é a hipotenusa, podemos calcular da seguinte maneira:

$$\cos 35° = \frac{cat\ adj}{hip} \Rightarrow 0{,}8192 = \frac{4}{a} \Rightarrow a = \frac{4}{0{,}8192} \cong 4{,}8828$$

Para encontrar b, que é o cateto oposto em relação ao ângulo de 35°, podemos calcular da seguinte maneira:

$$tg\ 35° = \frac{cat\ op}{cat\ adj} \Rightarrow 0{,}7002 = \frac{b}{4} \Rightarrow b \cong 2{,}8008.$$

4. Uma pessoa com 1,75 m de altura e que se encontra a 20 m da base de um edifício vê o ponto mais alto dele sob um ângulo de 50°. Qual a altura aproximada do edifício?

Resolução:

$$tg\ 50° = \frac{CO}{CA} \Longrightarrow 1{,}1917.20 = CO \Longrightarrow CO \cong 23{,}834\ m.$$

Logo $h = 23{,}834 + 1{,}75 \Longrightarrow h \cong 25{,}584\ m.$

5. João trabalha em um prédio e todos os dias tem que subir uma escada de 8 degraus, que tem aproximadamente 2 metros de comprimento e 30 graus de inclinação. Determine a altura de cada degrau.

Resolução:

$$sen\ 30° = \frac{cat\ op}{hip} = \frac{h}{2} \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1\ m$$

Se a altura da escada é de 1 m e ela possui 8 degraus, então dividindo a altura por 8 encontramos a altura de cada degrau.

Degrau = $\frac{h}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125\ m.$

6. Se $a = 60°$ e $b = 45°$, calcule:

a) $sen(a + b)$

b) $sen(a - b)$

c) $\cos(a + b)$

d) $tg\ (a - b)$

Resolução:

a) $sen(60° + 45°) = sen\ 60° \cdot \cos 45° + sen\ 45° \cdot \cos 60°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

b) $sen(60° - 45°) = sen\ 60° \cdot \cos 45° - sen\ 45° \cdot \cos 60°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

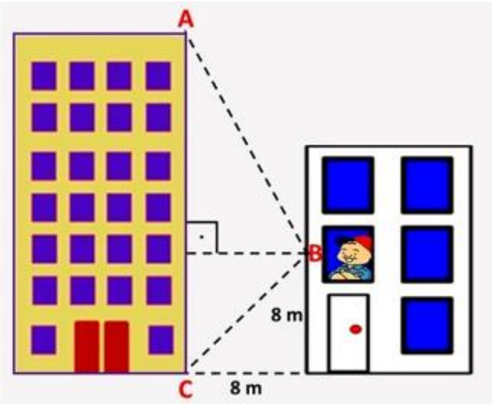
c) $\cos(60° + 45°) = \cos 60° \cdot \cos 45\ ° - sen\ 60° \cdot sen\ 45°$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

d) $tg(60° - 45°) = \frac{tg\ 60° - tg\ 45°}{1 + tg\ 60° \cdot tg\ 45°} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}.$

<u>**Desafio:**</u> Pedro, localizado a 8 metros do chão, está observando o prédio vizinho ao seu. Sabendo que a sua distância para o prédio vizinho é de 8 m e entre as duas estruturas forma-se um triângulo, cujo ângulo ABC é de 105°, determine a altura do prédio que Pedro está observando.

Figura 26 – Desafio



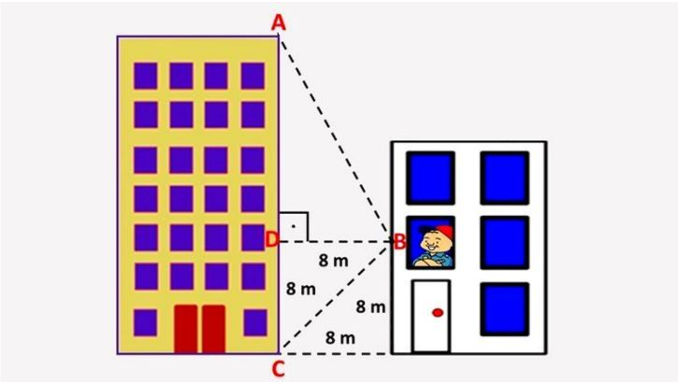
Fonte: https://www.professorjanildoarantes.com.br/2022/06/trigonometria-pedro-localizado-8-metros.html

Resolução:

No desenho, ao efetuarmos a projeção do ponto B no prédio que Pedro está observando, dando a ele o nome de D, criamos o triângulo isósceles DBC.

O triângulo isóscele possui dois lados iguais e, portanto, $DB = DC = 8\,m$.

Figura 27 – Resolução desafio



Fonte: https://www.professorjanildoarantes.com.br/2022/06/trigonometria-pedro-localizado-8-metros.html

Utilizando a função tangente:

$$tg\ 30° = \frac{8}{CA} \Longrightarrow CA = 13{,}86\,m.$$

A altura do prédio representa a distância entre os vértices A e C, sendo assim

$$AC = 13{,}86 + 8 \Longrightarrow AC = 21{,}86\,m.$$

Portanto, a altura do prédio é de $21{,}86\,m$.

10.2 **Relatório**

Relatório 20/04/2024

Iniciamos o encontro na sala A217 às 8h06, com a presença de 19 alunos. Na última aula já havíamos notado certa dificuldade na resolução da lista de exercícios sobre geometria analítica. Além disso, quando questionamos se a turma havia resolvido os exercícios em casa e comparado com as resoluções que enviamos, todos responderam que não. Portanto, optamos por resolver três dos exercícios no quadro de modo a retomar alguns conceitos. Alguns alunos não tinham vindo na aula anterior, então entregamos as cópias das listas que sobraram.

A estagiária Ana corrigiu o exercício 1 questionando os alunos sobre as classificações das retas no plano. Nesse momento, dois alunos responderam corretamente como saber se duas retas são paralelas. Logo após, a estagiária Stephany corrigiu a letra a) dos exercícios 3 e 4 de forma investigativa. Durante a correção, percebemos dificuldade com a matemática básica, por exemplo, em manipulações algébricas de equações do primeiro grau. Apesar disso, os alunos se mostraram bastante participativos.

Dando sequência a aula, a estagiária Meirielly iniciou as explicações sobre o conteúdo de trigonometria definindo as relações de proporção. Um dos lados da turma estava mais silenciosa e o outro mais participativo. Após as explicações, apresentamos a música do seno, cosseno e tangente e cantamos com a turma. Nesse momento, os alunos se animaram e aparentemente todos cantaram junto. Para a aplicação das razões trigonométricas, as estagiárias Ana e Milena fizeram dois exemplos, que também teve boa participação da turma e alguns sussurravam entre si que tinham entendido.

Posteriormente, apresentamos a tabela trigonométrica dos ângulos notáveis e ensinamos mais uma música para a turma não esquecer dos valores. Os alunos novamente nos acompanharam na cantoria, de forma que recebemos um ótimo *feedback* desse tipo de proposta no ensino.

Mais adiante, dividimos os alunos em cinco trios e um quarteto para a realização do “Pife trigonométrico”. De início precisamos auxiliar bastante os alunos, pois tiveram dificuldade em compreender como jogar. Com o passar do tempo foram pegando o jeito. Ao final da dinâmica todos os grupos tiveram pelo menos um vencedor e um dos grupos teve três, isto é, conseguiu jogar três vezes. Além disso, cada vencedor ganhou um chocolate (bis) como prêmio. Percebemos que a dinâmica foi positiva uma vez que os alunos conseguiram aplicar e fixar os conceitos vistos na aula de forma prática e interativa.

Na sequência, entregamos um material para os alunos e explicamos a definição de arco e ângulo central com alguns exemplos. Também explicamos as unidades de medida dos ângulos e como converter graus em radianos e vice-versa. Durante o exemplo da estagiária Stephany, a docente Francieli complementou nossa explicação apresentando porque o π é relacionado com o ângulo de $180°$. Para isso, utilizou a lousa, régua e compasso. Os discentes demonstraram terem gostado da explicação e obtido mais clareza.

Ao final da aula, entregamos aos estudantes uma lista de exercícios sobre os conceitos trabalhados no encontro, principalmente envolvendo as razões trigonométricas e conversões entre as unidades do ângulo. Enquanto isso, circulamos pela sala de aula tirando dúvidas. Nesse instante, vários alunos solicitaram nossa ajuda, porém como não restava muito tempo de aula foi possível resolver apenas as primeiras questões.

11. Encontro 8

11.1 Plano de aula

Plano de aula – Encontro 8 – 27/04/2024

Público-alvo: Alunos inscritos no projeto de ensino e extensão Promat.

Conteúdo: Trigonometria.

Objetivo geral: Compreender os conceitos que envolvem trigonometria e desenvolver estratégias de cálculo nos exercícios propostos.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com o conteúdo indicado acima, espera-se que o aluno seja capaz de:

- Compreender o conceito de arco e comprimento de arco;
- Identificar os quadrantes e as coordenadas dos pontos na circunferência unitária;
- Explorar as funções trigonométricas (seno, cosseno e tangente) em relação aos ângulos na circunferência unitária;

- Aplicar as propriedades da circunferência trigonométrica para resolver problemas de trigonometria.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Lousa, giz, caderno, lápis, borracha, ciclo trigonométrico, cartelas para o jogo batalha naval circular e atividades impressas.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos o encontro corrigindo, na lousa, duas questões da lista de exercícios entregue na última aula, sobre trigonometria no triângulo retângulo.

4. Uma pessoa com 1,75 m de altura e que se encontra a 20 m da base de um edifício vê o ponto mais alto dele sob um ângulo de 50°. Qual a altura aproximada do edifício?

Resolução:

$$tg\ 50° = \frac{CO}{CA} \Longrightarrow 1{,}1917.20 = CO \Longrightarrow CO \cong 23{,}834\ m.$$

Logo $h = 23{,}834 + 1{,}75 \Longrightarrow h \cong 25{,}584\ m.$

5. João trabalha em um prédio e todos os dias têm que subir uma escada de 8 degraus, que tem aproximadamente 2 metros de comprimento e 30 graus de inclinação. Determine a altura de cada degrau.

Resolução:

$$sen\ 30° = \frac{cat\ op}{hip} = \frac{h}{2} \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1\ m$$

Se a altura da escada é de 1 m e ela possui 8 degraus, então dividindo a altura por 8 encontramos a altura de cada degrau.

Degrau = $\frac{h}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125\ m.$

Após a correção, introduziremos o conceito de ciclo trigonométrico para dar sequência ao nosso estudo sobre a trigonometria. A fim de ilustrar a ideia, mostraremos para a turma o ciclo trigonométrico físico, emprestado do Laboratório de Ensino da Matemática.

Ciclo trigonométrico: Na matemática, um círculo unitário ou círculo trigonométrico é um círculo com raio igual a um. Frequentemente, especialmente em trigonometria, o círculo unitário é o círculo de raio centrado na origem do plano cartesiano.

Na sequência, apresentaremos a definição de arco de uma circunferência e ângulo central correspondente.

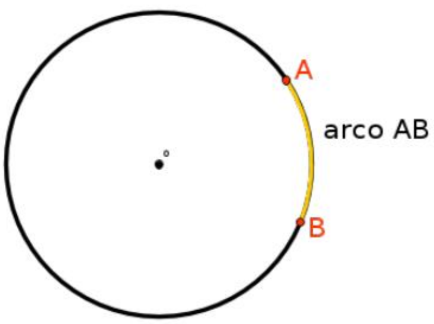
Arco e ângulo central correspondente

Recordando alguns conceitos já conhecidos da Geometria plana, temos que:

• **Arco:** é uma das partes da circunferência delimitada por dois pontos.

Se os dois pontos coincidirem, teremos arco nulo ou arco de uma volta.

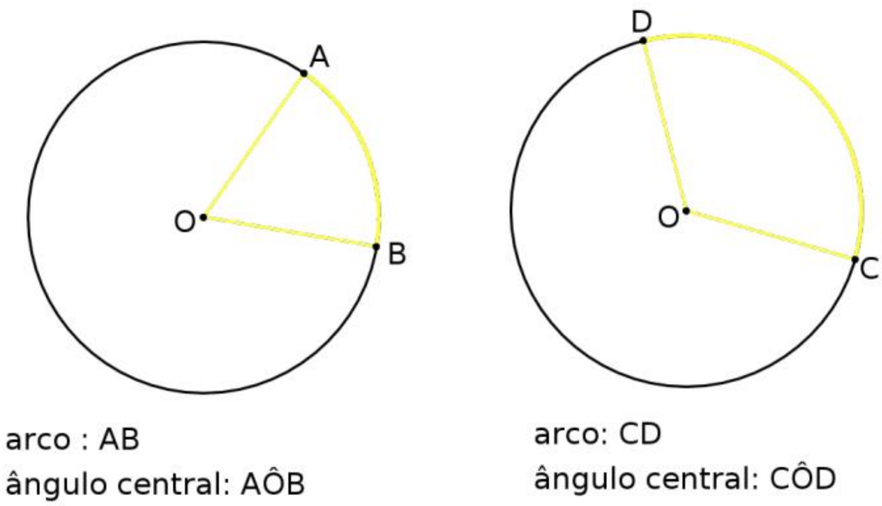
Figura 28 - Arcos



Fonte: IEZZI (2013)

- **Ângulo central:** todo arco de circunferência tem um ângulo central correspondente a ele.

Figura 29 – Ângulo central



Fonte: IEZZI (2013)

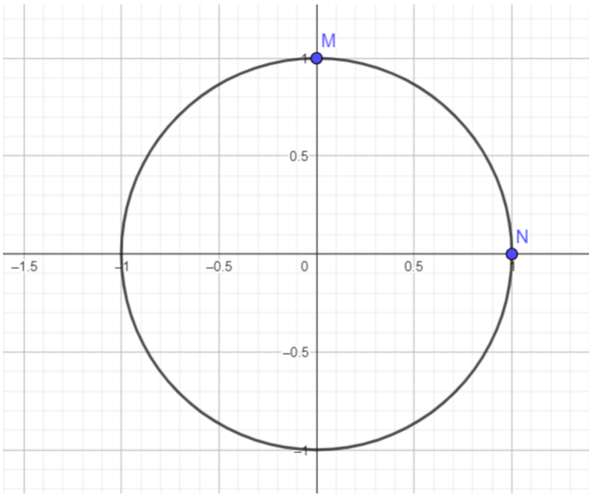
Nesse momento, destacaremos alguns pontos:

- Comprimento ou medida de arco: a medida de um arco é a medida do ângulo central correspondente a ele, independentemente do raio da circunferência que contém o arco. Usam-se geralmente unidades como o grau e o radiano para medir arcos.
- O comprimento ou perímetro da circunferência de raio r vale $2\pi r$.

<u>Exemplo 1:</u>

Qual o comprimento do arco delimitado pelos pontos M e N abaixo?

Figura 30 – Comprimento do arco exemplo 1



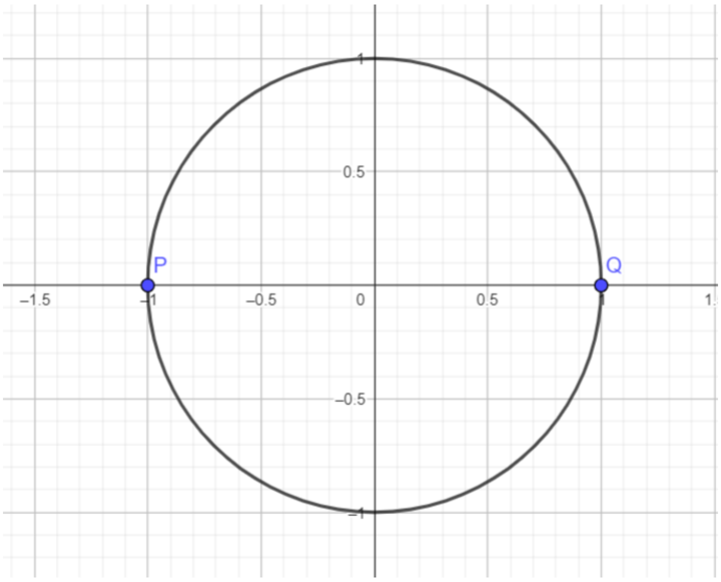
Fonte: Elaborado pelas autoras

Resposta: 90° ou $\frac{\pi}{2}$.

<u>Exemplo 2:</u>

Qual o comprimento do arco delimitado pelos pontos P e Q abaixo?

Figura 31 – Comprimento do acordo exemplo 2



Fonte: Elaborado pelas autoras

Resposta: 180º ou π.

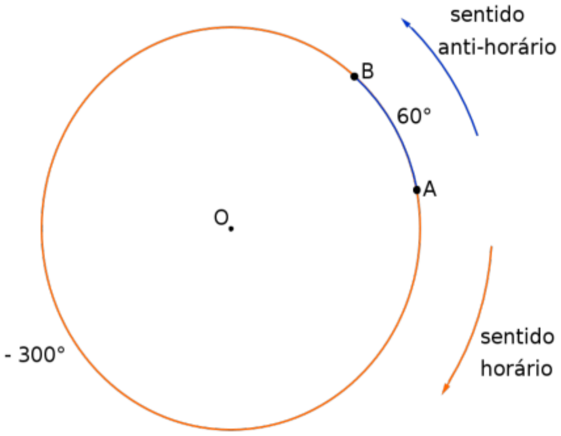
É importante destacar novamente como realizar a transformação entre graus e radianos, pois percebemos muitas dúvidas na última aula.

Dando sequência a aula, explicaremos que o ciclo trigonométrico é uma circunferência orientada e algumas de suas propriedades.

Circunferência orientada no plano cartesiano

Podemos percorrer uma circunferência em dois sentidos; no sentido horário e no sentido anti-horário. Na circunferência abaixo, adotando o sentido anti-horário para as medidas **positivas**, fica determinado que o sentido oposto (horário) fornece medidas **negativas**. Assim:

Figura 32 – Sentido horário e anti-horários

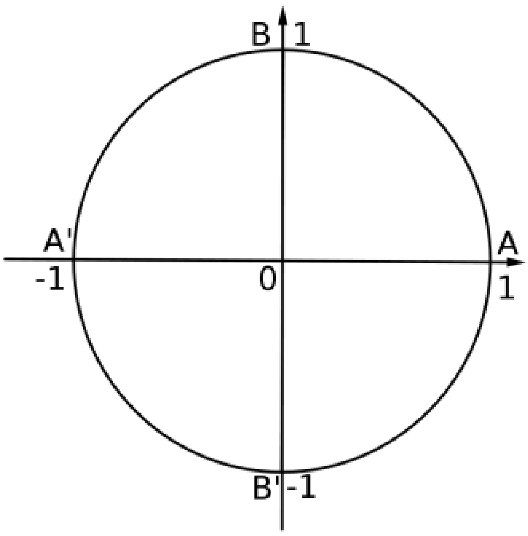


- sentido anti-horário: med(AB) = 60°
- sentido horário: med(AB) = - 300°

Fonte: IEZZI (2013)

A circunferência trigonométrica, ou ciclo trigonométrico, tem centro na origem O(0,0) de um plano cartesiano e raio de 1 unidade. No ciclo trigonométrico, o ponto A(1,0) é a origem de todos os arcos, isto é, o ponto a partir do qual percorremos a circunferência até um ponto P para determinar o arco AP (P é a extremidade do arco). Adotando o sentido anti-horário como positivo, associaremos, a cada ponto P da circunferência, a medida de AP tal que de $0 \text{ rad} \leqslant \text{med}(AP) \leqslant 2\pi\text{rad}$, ou $0 \text{ rad} \leqslant \text{med}(AP) \leqslant 360°$.

Figura 33 – Ângulos e quadrantes



$$med(AB) = 90° ou \ \frac{\pi}{2} \ rad$$

$$med(AA') = 180° ou \ \pi \ rad$$

$$med(AB') = 270° ou \ \frac{3\pi}{2} \ rad$$

$$med(ABA) = 360° ou \ 2\pi \ rad$$

Fonte: IEZZI (2013)

Na sequência, explicaremos que o ciclo é dividido em: eixo das abscissas (eixo A'A) e o eixo das ordenadas (eixo B'B) do plano e dividem o ciclo em quatro quadrantes.

Nesse momento, é importante relembrarmos como transformar graus em radianos e vice-versa.

Dessa forma, escreveremos a tabela de ângulos notáveis da aula passada em radianos.

Quadro 4 – Ângulos notáveis radiano e graus

	30º ou $\frac{\pi}{6}$	45º ou $\frac{\pi}{4}$	60º ou $\frac{\pi}{3}$
$sen\ x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\ x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\text{tg}\ x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Elaborado pelas autoras

Arcos côngruos

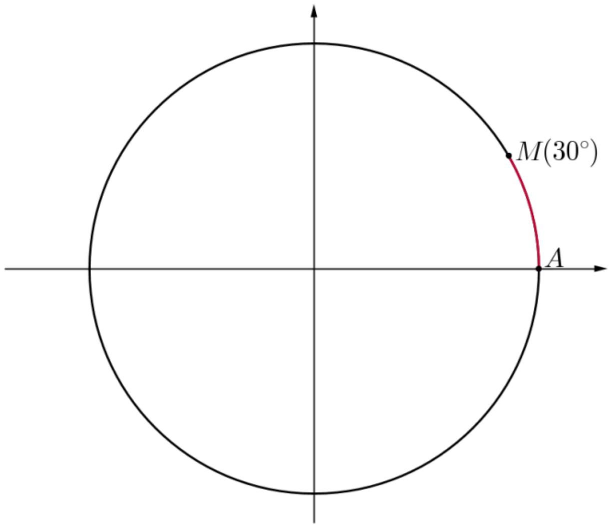
Arcos côngruos: arcos trigonométricos que têm a mesma extremidade são chamados de arcos côngruos.

Se α e β são medidas de arcos côngruos, indicamos: α ≡ β (lê-se: α é côngruo a β).

<u>Exemplo:</u>

Girando 30°, no sentido anti-horário, a partir do ponto A da circunferência trigonométrica abaixo, paramos no ponto M; logo, 30° é uma medida associada ao ponto M.

Figura 34 – Arco de 30°



Fonte: IEZZI (2013)

Há, porém, infinitas outras medidas associadas ao ponto M. Por exemplo:

• Girando uma volta completa mais 30°, no sentido anti-horário, a partir do ponto A, também paramos no ponto M. Logo, 360°+30°, isto é, 390° também é uma medida associada ao ponto M.

• Girando 330°, no sentido horário, a partir do ponto A, paramos no ponto M. Logo, -330° também é uma medida associada ao ponto M.

Assim, temos: $30° \equiv 390° \equiv -330°$

Em seguida, deixaremos passaremos alguns exercícios de aplicação, no quadro, para os alunos efetuarem e, enquanto isso, circularemos pela sala tirando dúvidas.

Exercícios:

1. Determine alguns arcos côngruos ao ângulo de 315º.

Resolução:

... $1035^{\circ} \equiv 675^{\circ} \equiv 315^{\circ} \equiv -45^{\circ} \equiv -405^{\circ} \equiv 765^{\circ}$ ...

2. Em qual quadrante está localizado o ângulo de 2 735° no sentido positivo?

Resolução:

Como cada volta completa possui 360°, dividimos 2 735 por 360.

$\frac{2735°}{360°} = 7 \times 360° + 215°.$

São sete voltas completas mais 215º.

O ângulo de 215º está no terceiro quadrante no sentido positivo (anti-horário).

3. Durante o estudo do momento circular, um físico fez a análise de um objeto que estava girando em torno dele mesmo, formando um ângulo de 15 240º. Analisando esse ângulo, o arco formado por ele está em qual quadrante?

Resolução:

Sabemos que, a cada 360º, esse objeto completou uma volta em torno dele mesmo. Ao realizar a divisão de 15 240 por 360, encontraremos quantas voltas completas esse objeto deu em torno dele mesmo, mas o nosso maior interesse é no resto, que representa o ângulo em que ele parou.

15 240 : 360 = 42,333…

O resultado mostra que ele deu 42 voltas em torno dele mesmo e andou mais um pouco, mas

360 · 42 = 15 120, então o ângulo que restou foi de:

15 240 – 15 120 = 120º

Sabemos que 120º é um ângulo do segundo quadrante.

Após alguns minutos, corrigiremos os exercícios no quadro, com a participação da turma.

Posteriormente, dividiremos os alunos em duplas a fim de realizar o jogo Batalha Naval Circular.

Batalha Naval Circular

<u>Regras:</u>

1. Cada jogador posiciona a esquadra em seu tabuleiro (anexo) sem que seu oponente veja.

Uma esquadra é formada por:

- 1 porta-aviões (4 marcas "X" em posições consecutivas em uma reta ou em uma circunferência);
- 2 submarinos (3 marcas "O" em posições consecutivas em uma reta ou em uma circunferência);
- 4 fragatas (1 marca "#");
- 3 destroyers (2 marcas "$*$" em posições consecutivas em uma reta ou em uma circunferência);

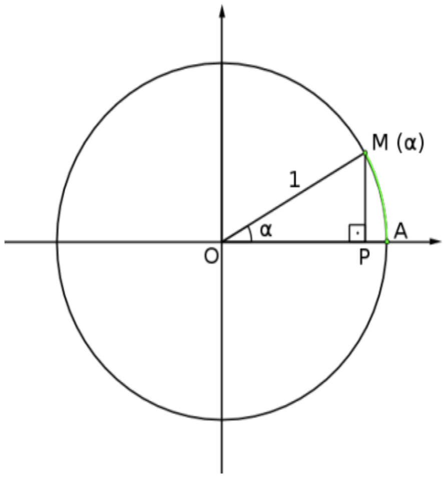
2. Decide-se quem começa no par ou ímpar.
3. Alternadamente, cada jogador tem direito a fazer um lançamento falando uma posição do tabuleiro. Uma posição corresponde à forma (medida do raio, ângulo). Por exemplo: (3,120°).
4. Se o lançamento atingir alguma das embarcações do oponente, este diz "acertou" e especifica o tipo de embarcação. O jogador registra no tabuleiro destinado às marcas do seu oponente a embarcação atingida e volta a fazer um novo lançamento. Ele deverá continuar jogando até errar.
5. Se o lançamento não atingir nenhuma embarcação, o oponente diz "água" e é sua vez de jogar.
6. Os jogadores prosseguem até que uma das frotas seja totalmente destruída.
7. Vence o jogador que conseguir atingir todas as embarcações de seu oponente.

Seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico

Com base na ideia de seno e cosseno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo, vamos estender o conceito de seno e cosseno para um ciclo trigonométrico.

Para estender a transição do triângulo retângulo para a circunferência trigonométrica, consideremos um arco trigonométrico AM de medida α, com $0° < \alpha < 90°$. Podemos construir um triângulo MOP da seguinte forma:

Figura 35 – Triângulo retângulo no círculo trigonométrico



Fonte: IEZZI (2013)

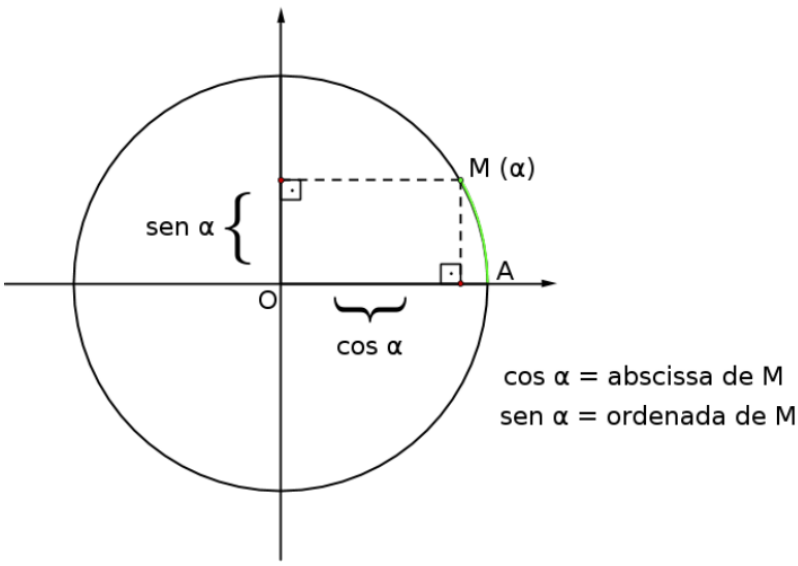
<u>Seno e cosseno:</u> Dado um arco trigonométrico AM de medida α, chamam-se seno e cosseno de α a ordenada e a abcissa do ponto M, respectivamente.

Isso vem das proporções explicadas na última aula

$$sen\ \alpha = \frac{CO}{HIP} = \frac{CO}{1} = CO.$$

$$\cos\alpha = \frac{CA}{HIP} = \frac{CA}{1} = CA.$$

Figura 36 – Seno e cosseno no círculo trigonométrico



Fonte: IEZZI (2013)

<u>Tangente</u>: Seguindo essa mesma lógica, sabemos da última aula que a tangente de um ângulo qualquer α é dada por

$$tg\ \alpha = \frac{CO}{CA}$$

Mas acabamos de ver que no círculo trigonométrico, como a hipotenusa vale 1

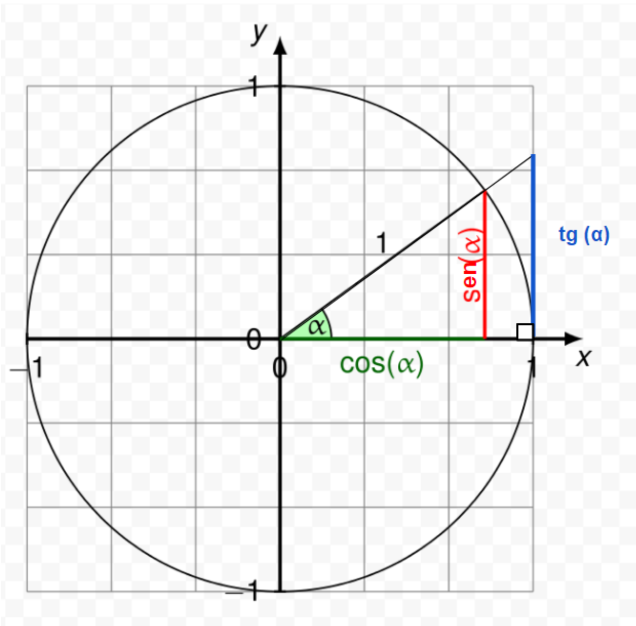
$CO = sen\ \alpha$ e $CA = \cos\alpha$.

Logo,

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ x}{\cos x}.$$

Graficamente temos que

Figura 37 – Seno, cosseno e tangente graficamente



Fonte: https://vestibulares.estrategia.com/portal/materias/matematica/circulo-trigonometrico/

Na sequência, mostraremos como varia o sinal de seno, cosseno e tangente em cada quadrante com base nesses conceitos e mostrando no ciclo trigonométrico.

Em seguida, explicaremos sobre redução ao 1° quadrante do seno e cosseno por meio de um exemplo introdutório.

Nesse instante, destacaremos que o motivo de reduzirmos os ângulos ao 1º quadrante para o cálculo do seno, cosseno e tangente se justifica em podermos utilizar a tabela dos ângulos notáveis, apenas adequando os sinais do quadrante.

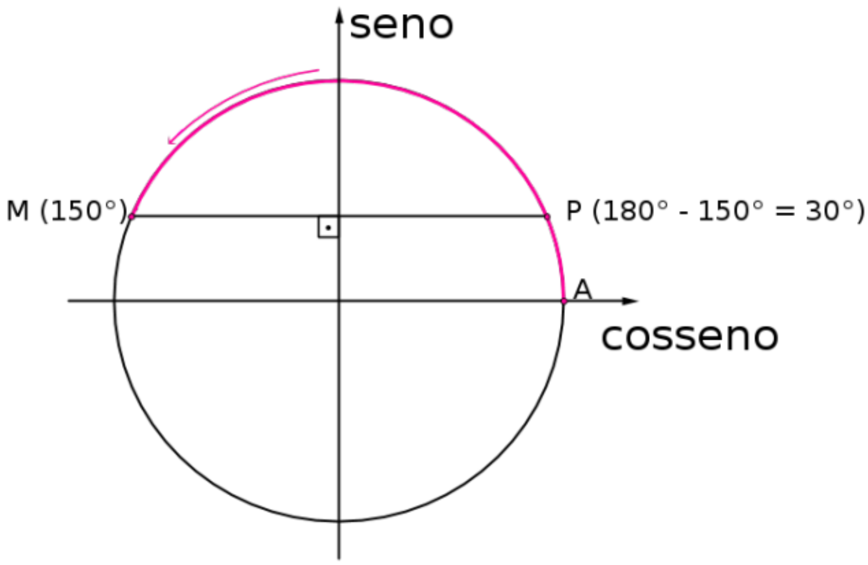
<u>Exemplo:</u>

Usando a tabela dos arcos notáveis, calcular sen 150° e cos 150°.

Resolução:

A extremidade M do arco de 150° pertence ao 2° quadrante. Traçando por M a perpendicular ao eixo dos senos, obtemos o ponto P, correspondente de M no 1° quadrante, conforme a figura abaixo.

Figura 38 – Arcos simétricos



Fonte: IEZZI (2013)

Os pontos M e P têm ordenadas iguais e abscissas opostas. Logo:

sen 150° = sen 30° = $\frac{1}{2}$ e

cos 150° = - cos 30° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Por fim, deixaremos alguns exercícios (anexo 2) de aplicação sobre seno cosseno e tangente no ciclo trigonométrico para os alunos realizarem em sala. Enquanto os alunos realizam a tarefa, circularemos pela sala tirando dúvidas. Após alguns minutos, os corrigiremos no quadro.

Avalição: a avaliação ocorrerá de forma contínua ao longo da aula acompanhando a participação e interação dos alunos durante as explicações e a partir das atividades propostas e dinâmica.

Referências:

ASTH, Rafael C. Exercícios sobre círculo trigonométrico com resposta. **Toda Matéria.** Disponível em: https://www.todamateria.com.br/exercicios-sobre-circulo-trigonometrico/. Acesso em: 25 abr. 2024.

BATALHA NAVAL CIRCULAR. **MATHEMA**, 27 set. 2019. Disponível em: https://mathema.com.br/jogos-e-atividades/batalha-naval-circular/. Acesso em: 25 abr. 2024.

ELIAS, Kauane. Círculo trigonométrico: o que é, exemplos, usos e aplicações. **Estratégia vestibulares**, 9 ago. 2022. Disponível em: https://vestibulares.estrategia.com/portal/materias/matematica/circulo-trigonometrico/. Acesso em: 25 abr. 2024.

IEZZI, G; DOLCE, O; DEGENSZAJN, D; PÉRIGO, R; ALMEIDA, N. **Matemática ciências e aplicações**. 7ª Edição. São Paulo: Saraiva, 2013.

RIBEIRO, Amanda Gonçalves. Círculo trigonométrico. **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/simetria-no-circulo-trigonometrico.htm. Acesso em: 25 abr. 2024.

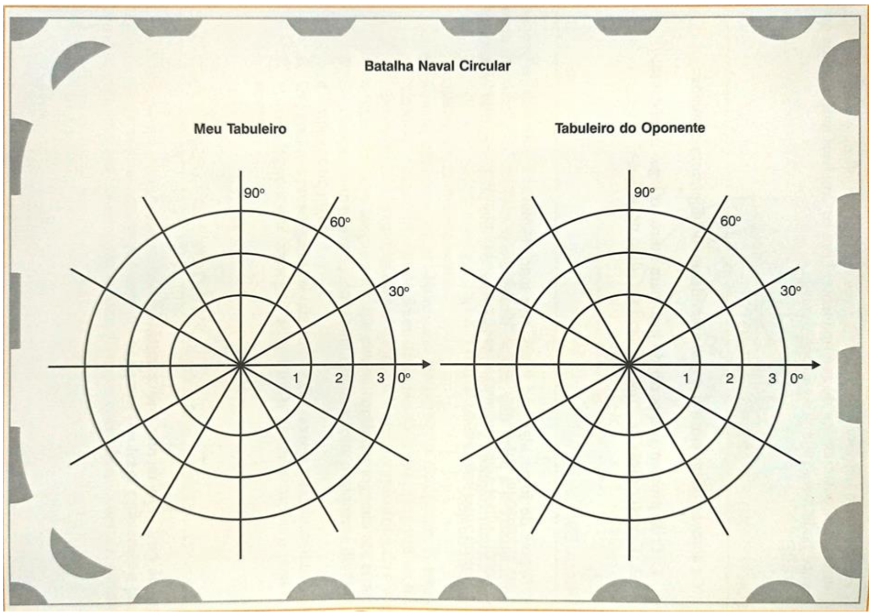
RIBEIRO, Amanda Gonçalves. Exercícios sobre Seno, Cosseno e Tangente**. Brasil Escola**. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-seno-cosseno-tangente.htm. Acesso em: 25 abr. 2024.

SANTOS, Edimar. Gincana Trigonométrica. **SlideShare**. Disponível em: https://pt.slideshare.net/edimarlsantos/gincana-trigonomtrica. Acesso em: 25 abr. 2024.

Anexos

Tabuleiro da batalha naval

Figura 39 – Tabuleiro jogo batalha naval



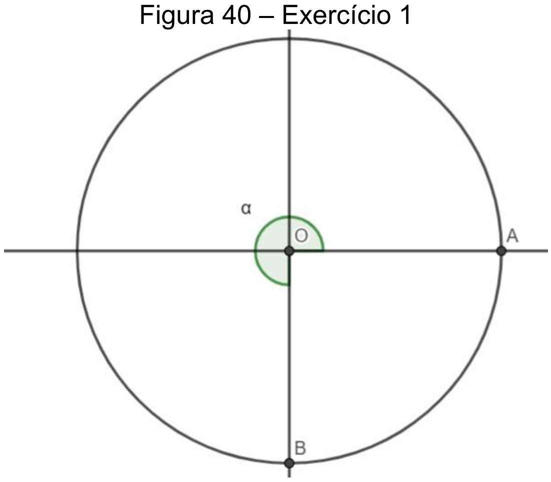
Fonte: https://mathema.com.br/jogos-e-atividades/batalha-naval-circular/

Anexo 2

Lista de exercícios

1) Quanto mede o ângulo alfa, na circunferência abaixo?

Figura 40 – Exercício 1

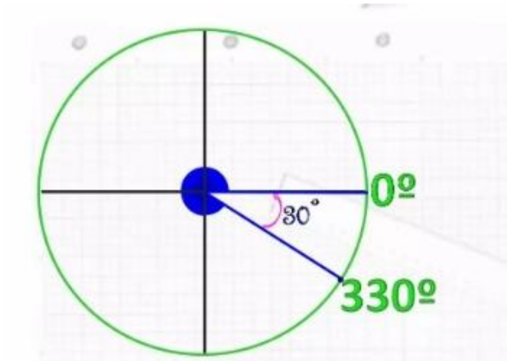


Fonte: Elaborado pelas autoras

Resolução: 270º ou $\frac{3\pi}{2}$.

2) Quanto vale o seno de 330°? Sabendo que

Figura 41 – Exercício 2

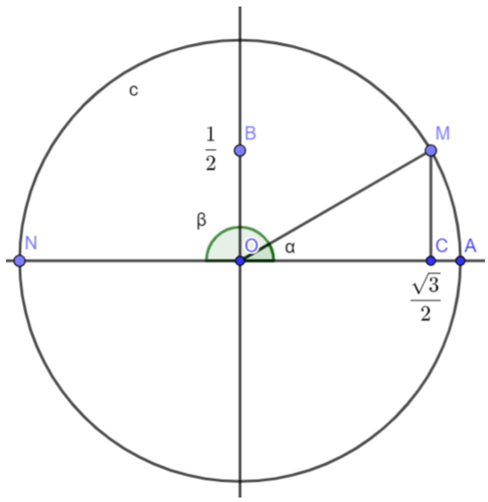


Fonte: https://pt.slideshare.net/edimarlsantos/gincana-trigonomtrica

Resolução: $sen\ 330° = sen\ 30° = -\frac{1}{2}$.

3) Analise as informações abaixo marque V para verdadeiro e F para falso.

Figura 42 – Exercício 3



Fonte: Elaborado pelas autoras

(V) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (V) $sen\ \alpha = \frac{1}{2}$ (V) $tg\ \beta = 0$ (F) $sen\ \beta = -2$

4) A tangente do ângulo $\frac{\pi}{2}$ é? Justifique.

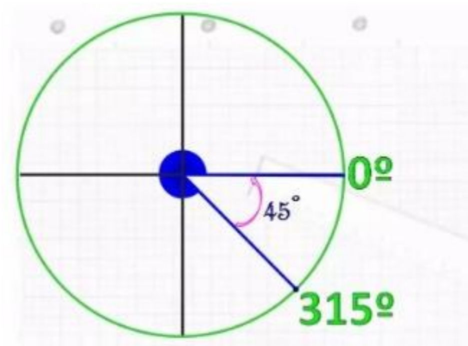
a) -1 b) 1 c) 0 d) Não existe

Resolução:

Letra d) Não existe.

5) Quanto vale a tangente de 315°? Sabendo que

Figura 43 – Exercício 5 tangente de 315°



Fonte: Santos (2024)

Resolução: $tg\ 315° = -tg\ 45° = -1.$

6) Quanto vale a expressão $\frac{5 \cos 90° - 4 \cos 180°}{2\ sen\ 270° - 2\ sen\ 90°}$?

Resolução:

$$\frac{5\ .0 - 4\ (-1)}{2\ .\ (-1) - 2\ (1)} = \frac{+4}{-2-2} = \frac{4}{-4} = -1.$$

7) (CESGRANRIO) Se x é um arco do 3º quadrante e $tg\ x = 1$ então $\cos x$ é?

Resolução:

$\cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

8) Quanto vale a expressão $\frac{sen^2\ 270° - cos\ 180° + sen\ 90°}{tg^2\ 45°}$?

Resolução:

$$\frac{(-1)^2 - (-1) + 1}{1^2} = \frac{3}{1} = 3.$$

11.2 **Relatório**

Relatório 27/04/2024

Iniciamos a aula às 8h07, com a presença de 23 alunos. A estagiária Milena verificou se algum aluno havia faltado na aula anterior e, consequentemente, ficado sem a lista de atividades e definições. Após distribuir o material aos que precisavam, as estagiárias Milena e Stephany procederam com a correção dos exercícios 4 e 5 da lista, respectivamente.

Durante a correção, um aluno que havia faltado na aula anterior tirou várias dúvidas, incluindo como identificar o cateto oposto e o cateto adjacente em um triângulo retângulo. Retomamos as músicas ensinadas anteriormente sobre as relações trigonométricas, reforçando-as com os alunos.

Em seguida, a estagiária Ana introduziu o conceito de círculo trigonométrico, e a estagiária Meirielly reforçou como transformar graus em radianos escrevendo a tabela de ângulos notáveis da aula passada em radianos. Continuamos com o conteúdo sobre a circunferência orientada no plano cartesiano. Uma aluna perguntou sobre a relação dos ângulos com os quadrantes do plano cartesiano, e aproveitamos a oportunidade para relacionar os quadrantes no círculo trigonométrico.

A estagiária Milena prosseguiu com a explicação sobre arcos côngruos e passou três exercícios para os alunos resolverem. Durante a resolução, circulamos pela sala para tirar dúvidas.

Após o intervalo, corrigimos os exercícios no quadro. As estagiárias Stephany e Milena explicaram as relações de seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico, destacando os sinais de cada relação conforme a posição no círculo.

Para encerrar, aplicamos o jogo Batalha Naval Circular. Explicamos as regras, dividimos os alunos em grupos, e eles começaram a jogar. Observamos que a dinâmica foi bem recebida pelos alunos, entretanto, como invertemos a ordem de aplicação da atividade, eles não a associaram à localização das relações no círculo trigonométrico. Portanto, a atividade não atingiu plenamente o objetivo esperado. Finalizamos a aula às 11h40.

12. **Encontro 9**

12.1 **Plano de aula**

Plano de aula – Encontro 9 – 04/05/2024

Público-alvo: Alunos inscritos no projeto de ensino e extensão Promat.

Conteúdo: Trigonometria.

Objetivo geral: Compreender os conceitos que envolvem a trigonometria e desenvolver estratégias de cálculo nos exercícios propostos.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com o conteúdo indicado acima, espera-se que o aluno seja capaz de:

- Calcular seno, cosseno e tangente de diferentes ângulos no ciclo trigonométrico;
- Conhecer a relação fundamental da trigonometria;
- Identificar e calcular as identidades trigonométricas;
- Determinar domínio, imagem, gráfico, período das funções trigonométricas.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Lousa, giz, caderno, lápis, borracha, celular, *notebook*, projetor, *GeoGebra* e atividades impressas.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos a aula retomando os conceitos de seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico e escreveremos no quadro suas definições.

Seja AP um arco de circunferência de medida α.

Seno de $\boldsymbol{\alpha}$: corresponde à projeção do ponto P em relação ao eixo y (eixo das ordenadas).

Cosseno de $\boldsymbol{\alpha}$: corresponde à projeção do ponto P em relação ao eixo x (eixo das abscissas).

Tangente de $\boldsymbol{\alpha}$: corresponde a intersecção da reta OP com a reta tangente ao ciclo trigonométrico passando por A (eixo das tangentes).

Nesse momento, utilizaremos o ciclo trigonométrico físico emprestado do Laboratório de Ensino da Matemática para mostrar visualmente o que acontece com os valores de seno, cosseno e tangente à medida que aumentamos o ângulo x, em que $0 < x < 2\pi$.

Com essa abordagem e a participação da turma determinaremos os sinais das razões trigonométricas para cada um dos quadrantes. Além disso, classificaremos se os valores estão crescendo ou decrescendo.

Quadro 5 – Sinal do seno em cada um dos quadrantes

Seno	Sinal (positivo ou negativo)	Valores (crescentes ou decrescentes)

1º quadrante	+	Crescente
2º quadrante	+	Decrescente
3º quadrante	-	Decrescente
4º quadrante	-	Crescente

Fonte: Elaborado pelas autoras

Quadro 6 – – Sinal do cosseno em cada um dos quadrantes

Cosseno	Sinal (positivo ou negativo)	Valores (crescentes ou decrescentes)
1º quadrante	+	Decrescente
2º quadrante	-	Decrescente
3º quadrante	-	Crescente
4º quadrante	+	Crescente

Fonte: Elaborado pelas autoras

Quadro 7 – Sinal da tangente em cada um dos quadrantes

Tangente	Sinal (positivo ou negativo)	Valores (crescentes ou decrescentes)
1º quadrante	+	Crescente
2º quadrante	-	Crescente
3º quadrante	+	Crescente
4º quadrante	-	Crescente

Fonte: Elaborado pelas autoras

Também retomaremos os pontos simétricos do ciclo trigonométrico dados pela relação ‘’sobra, falta, sobra, falta’’.

$$x \approx 180° - x \approx 180° + x \approx 360° - x.$$

Exemplos:

$$30° \approx 150° \approx 210° \approx 330°$$

$$45° \approx 135° \approx 225° \approx 315°$$

$$60° \approx 120° \approx 240° \approx 300°$$

Após esse momento, entregaremos uma lista de exercícios (anexo 1) para os alunos efetuarem em sala. Enquanto os estudantes realizam a tarefa, circularemos pela sala tirando dúvidas. Após alguns minutos, corrigiremos as questões oralmente.

Na sequência, entregaremos um material com a definição de duas identidades trigonométricas e dois exercícios de aplicação. Vamos ler os conceitos com a turma e explicar como são obtidas, fazendo uso do ciclo trigonométrico.

Definição (Identidades trigonométricas): As identidades trigonométricas são igualdades que associam funções trigonométricas.

Tangente: a tangente de um ângulo x é igual à razão entre o seno de x e o cosseno de x, em que $cos\ x \neq 0$:

$$tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos\ x}$$

Essa identidade vem da definição de $tg\ x$ abordada nas aulas anteriores como sendo $tg\ x = \frac{CO}{CA}$. Entretanto, no ciclo trigonométrico, $CO = sen\ x$ e $CA = \cos x$. Logo, $tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos\ x}$.

Relação fundamental da trigonometria: estabelece uma relação entre o seno e o cosseno de um ângulo x. De acordo com essa identidade,

$$sen^2x + cos^2x = 1.$$

Essa identidade vem da aplicação do teorema de Pitágoras no ciclo trigonométrico de modo que

$$(sen\ x)^2 + (\cos x)^2 = 1^2 \Longrightarrow$$

$$sen^2x + cos^2x = 1.$$

<u>Exercícios:</u>

a) Qual o valor da tangente de um ângulo x, sabendo que $sen\ x = \frac{1}{2}$ e $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Resolução:

$$tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Além disso, sabemos que $x = \frac{\pi}{6} = 30°$.

b) O ângulo x possui valor de seno igual a $\frac{3}{5}$, então o valor do cosseno e da sua tangente, sabendo que esse ângulo pertence ao primeiro quadrante são iguais a:

Resolução:

Primeiro calcularemos o valor do cosseno, pois sabemos que:

$$sen^2x + cos^2x = 1$$

$$(\frac{3}{5})^2 + cos^2x = 1$$

$$\frac{9}{5} + cos^2x = 1$$

$$cos^2x = 1 - \frac{9}{25}$$

$$cos^2x = \frac{16}{25}$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$$

$$\cos x = \frac{4}{5}.$$

Conhecendo o valor do cosseno e do seno, agora é possível calcular a tangente do ângulo:

$$tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}$$

$$tg\ x = \frac{3}{5} . \frac{5}{4} = \frac{3}{4}.$$

Logo, $tg\ x = \frac{3}{4}$.

(estimativa 30 min)

Dando sequência a aula, a fim de facilitar a visualização por meio de outra ferramenta de ensino, projetaremos as definições das identidades trigonométricas: secante, cossecante e cotangente. Nesse momento, explicaremos a relação com o $sen\, x,\ cosx$ e $tg\, x$ e daremos alguns exemplos.

Cossecante: $cossec\, x = \frac{1}{sen\, x} = \frac{1}{\frac{CO}{HIP}} = \frac{HIP}{CO}$.

Secante: $\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{HIP}{CA}$.

Cotangente: $cotg\, x = \frac{1}{\mathrm{tg}\, x} = \frac{CA}{CO}$.

(estimativa 20 min)

Funções trigonométricas

Para iniciar esse conteúdo, retomaremos o que é uma função e como determinar seu domínio e imagem.

Função: é uma relação entre dois conjuntos X e Y, em que, para todo elemento do conjunto X, existe um único correspondente no conjunto Y.

Domínio de uma função: é formado pelo conjunto de valores que x pode assumir.

Imagem de uma função: é formado pelo conjunto de valores estão relacionados a algum elemento do domínio.

(estimativa 10 min)

Agora, para trabalhar as funções trigonométricas optamos por utilizar o *software GeoGebra*, a fim de auxiliar na visualização dos conceitos.

Explicaremos que os alunos podem se dividir em grupos para a realização da próxima atividade. Os discentes também podem trabalhar individualmente, caso prefiram.

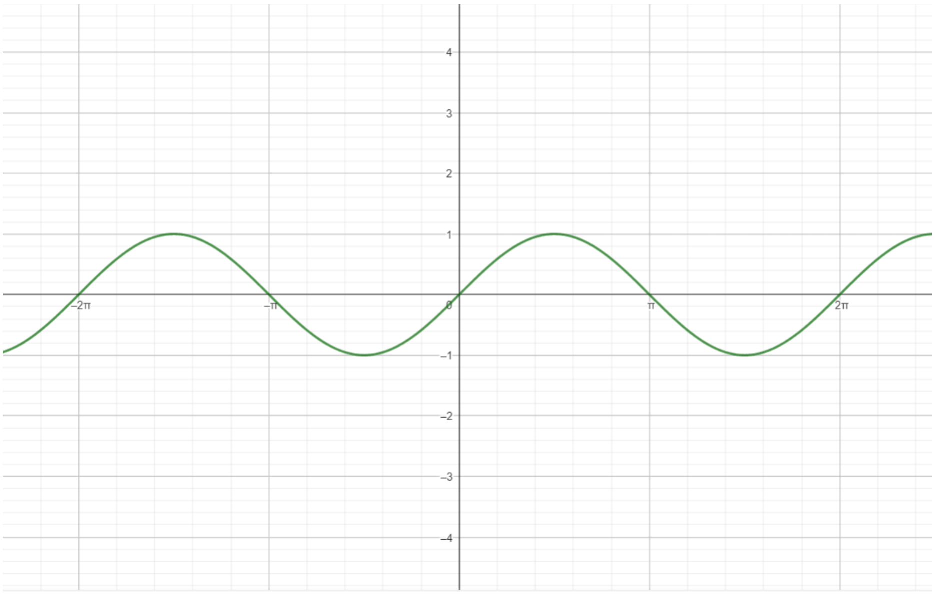
Atividade – Funções trigonométricas

A atividade consiste em completar a tabela disponível no apêndice identificando o domínio, imagem e período de algumas funções fornecidas.

Inicialmente, projetaremos os gráficos das funções seno, cosseno e tangente e completaremos os dados com a participação da turma. Nesse momento, esperamos que os alunos consigam entender bem a proposta, identificando e diferenciando os dados envolvidos.

- Gráfico da função seno:

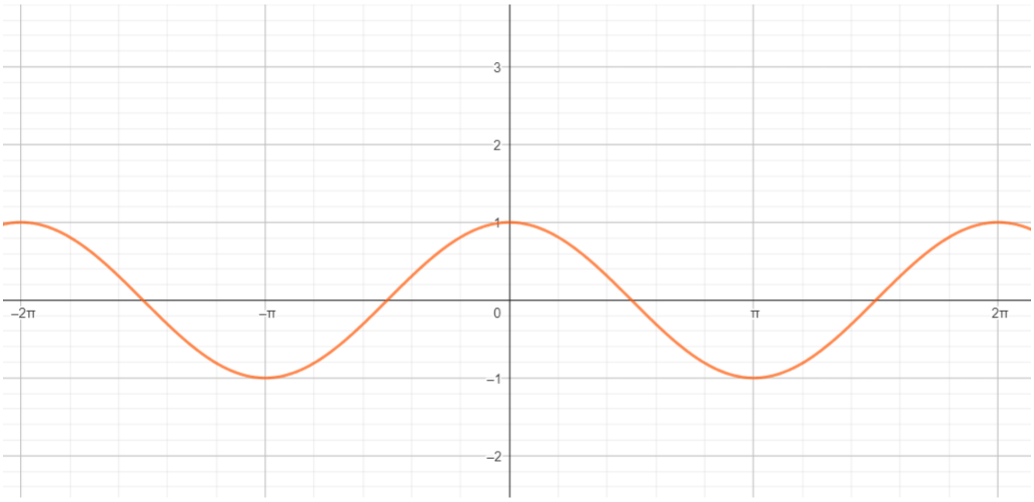
Figura 44 – Gráfico do seno



Fonte: Elaborado pelas autoras

- Gráfico da função cosseno:

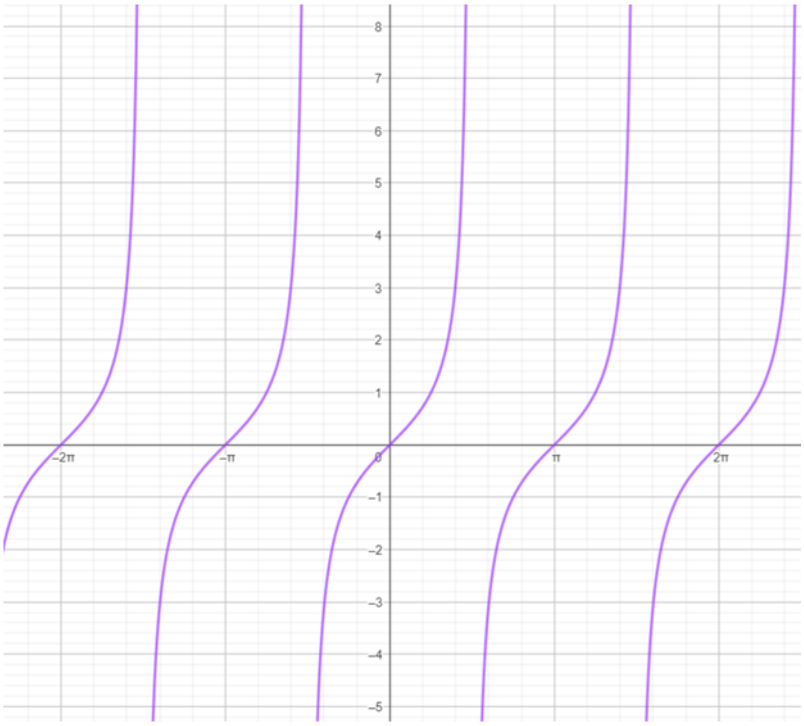
Figura 45 – Gráfico do cosseno



Fonte: Elaborado pelas autoras

- Gráfico da função tangente:

Figura 46 – Gráfico da tangente



Fonte: Elaborado pelas autoras

Para as demais funções, projetaremos os gráficos (durante 3-5 minutos cada) para os alunos completarem as informações. Enquanto isso, circularemos pela sala tirando dúvidas. Ao final da aula, recolheremos a atividade e faremos o fechamento do conteúdo.

(estimativa 60 min)

Avaliação: A avaliação ocorrerá de forma contínua no decorrer da aula, acompanhando a participação e interação dos alunos nas atividades propostas e resolução dos exercícios.

Referências bibliográficas

LEMES, Matheus. Parâmetros das funções trigonométricas. **Querobolsa**. Disponível em: https://querobolsa.com.br/enem/matematica/parametros-das-funcoes-trigonometricas. Acesso em: 17 abril 2024.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. Identidades trigonométricas. **Mundo Educação**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/identidade-trigonometrica.htm. Acesso em: 17 abril 2024.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. Funções trigonométricas. **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas-1.htm. Acesso em: 18 abril de 2024.

RIZZO, Maria Luiza Alves. Identidades trigonométricas. **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/identidades-trigonometricas.htm. Acesso em 17 abril 2024.

Apêndices

Quadro 8 – Atividade funções trigonométricas

Função	Domínio	Imagem	Período
$y = sen\ (x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	2π
$y = \cos\ (x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	2π
$y = tg\ (x)$	$\{x \in \mathbb{R};\ x\ \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$\mathbb{R}$	π
$y = sen\ (2x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	π
$y = 2\ sen\ (x)$	$\mathbb{R}$	$[-2, 2]$	2π
$y = 4 + sen(x)$	$\mathbb{R}$	$[3, 5]$	2π
$y = -3\ sen(x)$	$\mathbb{R}$	$[-3, 3]$	2π
$y = 2\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-2, 2]$	2π
$y = 4 + \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[3, 5]$	2π
$y = -3\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-3, 3]$	2π
$y = 2\ tg\ (x)$	$\{x \in \mathbb{R};\ x\ \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$\mathbb{R}$	π
$y = 4 + tg\ (x)$	$\{x \in \mathbb{R};\ x\ \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$\mathbb{R}$	π
$y = -3\ tg(x)$	$\{x \in \mathbb{R};\ x\ \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$\mathbb{R}$	π

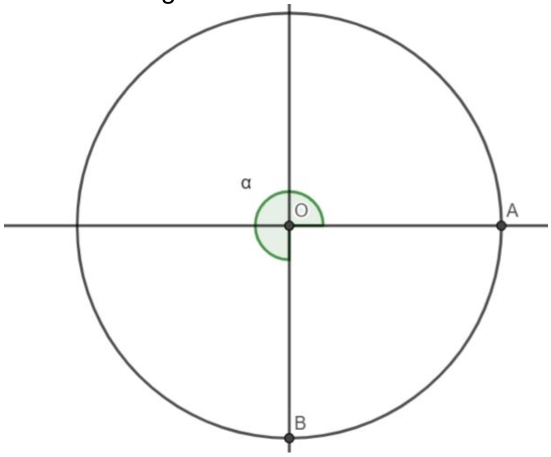
Fonte: Elaborado pelas autoras

Anexos

Lista de exercícios

1) Quanto mede o ângulo alfa, na circunferência abaixo?

Figura 47 – Exercício 1

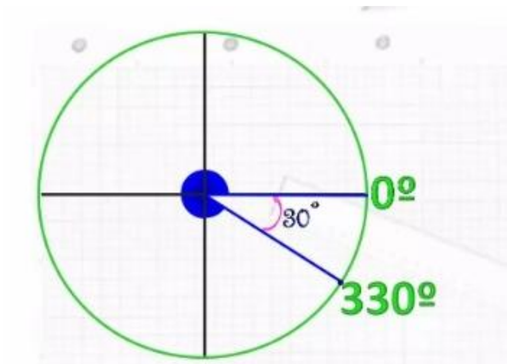


Fonte: Elaborado pelas autoras

Resolução: 270º ou $\frac{3\pi}{2}$.

2) Quanto vale o seno de 330°? Sabendo que

Figura 48 – Exercício 2

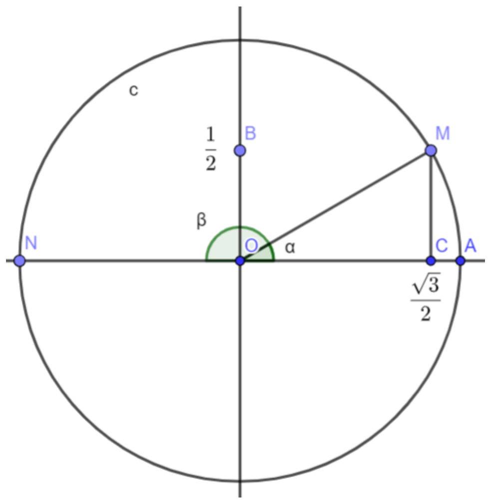


Fonte: https://pt.slideshare.net/edimarlsantos/gincana-trigonomtrica

Resolução: $sen\ 330° = sen\ 30° = -\frac{1}{2}$.

3) Analise as informações abaixo marque V para verdadeiro e F para falso.

Figura 49 – Exercício 3



Fonte: Elaborado pelas autoras

(V) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (V) $sen\ \alpha = \frac{1}{2}$ (V) $tg\ \beta = 0$ (F) $sen\ \beta = -2$

4) A tangente do ângulo $\frac{\pi}{2}$ é? Justifique.

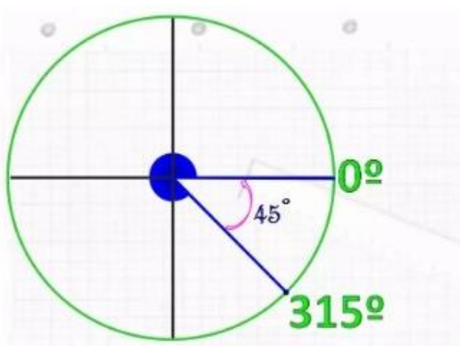
b) -1 b) 1 c) 0 d) Não existe

Resolução:

Letra d) Não existe.

5) Quanto vale a tangente de 315°? Sabendo que

Figura 50 – Exercício 5 tangente de 315°



Fonte: Santos (2024)

Resolução: $tg\ 315° = -tg\ 45° = -1$.

6) Quanto vale a expressão $\frac{5\cos 90° - 4\cos 180°}{2\ sen\ 270° - 2\ sen\ 90°}$?

Resolução:

$$\frac{5\,.0-4\,(-1)}{2\,.\,(-1)-2\,(1)} = \frac{+4}{-2-2} = \frac{4}{-4} = -1.$$

7) (CESGRANRIO) Se x é um arco do 3º quadrante e $tg\ x = 1$ então $\cos x$ é?

Resolução:

$\cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

8) Quanto vale a expressão $\frac{sen^2\ 270° - cos\ 180° + sen\ 90°}{tg^2\ 45°}$?

Resolução:

$$\frac{(-1)^2 - (-1) + 1}{1^2} = \frac{3}{1} = 3.$$

12.2 **Relatório**

Relatório 04/05/2024

No dia quatro de maio de 2024, às 8h10, realizamos o nono encontro do Promat na sala A217, com 18 alunos. Quatro alunos chegaram depois que iniciamos a aula.

Iniciamos com uma parte informativa, passando a informação de que se alguém tivesse atestados para justificar as faltas em outros dias, que entrasse em contato conosco. Reforçamos que, para obter o certificado, não pode haver mais de duas faltas não justificáveis.

Para o conteúdo de aula, começamos escrevendo algumas definições sobre seno, cosseno e tangente no quadro para retomar as medidas relacionadas ao ciclo trigonométrico, em que já foi trabalhado nos encontros passados sobre trigonometria. Usamos o ciclo trigonométrico físico para mostrar visualmente o que acontece com esses valores à medida que o ângulo aumenta.

Convidamos os alunos mais afastados na sala de aula a se aproximarem para visualizar melhor o ciclo trigonométrico, uma vez que sentimos que, na aula passada, foi algo que os alunos não compreenderam tão bem. Assim, com a participação da turma, determinamos os sinais das razões trigonométricas para cada um dos quadrantes, e a classificação em crescente ou decrescente em cada situação.

Em seguida, explicamos os pontos simétricos no ciclo trigonométrico por meio da relação “sobra, falta, sobra, falta”. Para praticar o que foi exposto até o momento, entregamos uma lista de exercícios. Durante a realização dela, observamos que alguns alunos ainda tinham dificuldade com a interpretação do ciclo quanto aos valores positivos e negativos dos quadrantes, porém com explicações individuais, facilitou a compreensão deles. À medida que as dúvidas eram esclarecidas, os alunos se empenhavam mais na resolução dos exercícios. Posteriormente todos participaram da correção, e isso nos indicou que o que faltou explicar no encontro passado foi resolvido.

O intervalo aconteceu entre as 9h40 até às 10h05.

Após a correção, seguindo com o conteúdo, entregamos um material impresso com as definições de duas identidades trigonométricas. Explicamos de que forma chegamos a essas fórmulas no quadro, relembrando novamente definições de encontros passados, como a explicação do Teorema de Pitágoras para obter a relação fundamental da trigonometria. Após isso, resolvemos dois exercícios de forma coletiva no quadro para os alunos perceberem como utilizamos as identidades para encontrar um valor que desconhecemos.

Dando sequência a aula, utilizamos o recurso de projeção de slides para abordar as outras identidades trigonométricas (cossecante, secante e cotangente) como sendo as inversas das que já conhecíamos. A maioria dos alunos estavam concentrados nas explicações e faziam anotações.

Seguidamente, explicamos sobre as funções trigonométricas. Porém antes, para contexto, retomamos o que é uma função, domínio e imagem, além da periodicidade de uma função. Neste momento também utilizamos o *software* geogebra para auxiliar na visualização dos gráficos das funções. Percebemos que alguns alunos estavam dispersando a atenção ou se debruçaram sobre as carteiras, não estavam mais interessados.

Entregamos a tabela com algumas funções para que os alunos pudessem praticar e identificar o domínio, imagem e período, com a ajuda da projeção dos gráficos. As três primeiras funções respondemos coletivamente e as demais deixamos que eles respondessem em grupos.

Como incentivamos aos alunos o uso do geogebra em seus celulares, alguns aproveitaram para usar o celular para se distrair, pois o fim da aula estava se aproximando. Os alunos que estavam respondendo preferiram observar a nossa projeção ao invés de abrir o software no celular devido a pouca experiência de como usá-lo. Uma aluna estava interagindo bastante com a nossa projeção do geogebra e respondia às nossas perguntas em cada um dos casos que apresentamos.

Ao final da aula, antes de dispensarmos todos os alunos, anunciamos que essa aula seria a última sobre conteúdo e que o último encontro, no próximo sábado, seria especial e diferente.

13. Encontro 10

13.1 Plano de aula

Plano de aula – Encontro 10 – 11/05/2024

Público-alvo: Alunos inscritos no projeto Promat.

Conteúdo: Oficinas Lúdicas.

Objetivo geral: Explorar a matemática por meio de jogos, problemas e atividades.

Objetivos específicos:

- Perceber que a matemática não é só abstração;
- Introduzir jogos relacionados a conteúdo anteriormente trabalhados;
- Realizar atividades de maneira coletiva;
- Estimular o enriquecimento do pensamento matemático;
- Sintetizar o ideal de cada proposta de atividade.

Conhecimento prévios: Operações matemáticas, geometria plana, geometria espacial, geometria analítica, probabilidade, análise combinatória, matrizes, sistemas lineares, trigonometria.

Tempo de execução: 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Garrafas com líquido colorido, um alvo feito de caixas com demarcações de pontuação, pecinhas para serem lançadas, urnas, maletas de papel vergê enumeradas, uma bola de futebol infantil de vinil, materiais impressos,

Encaminhamento metodológico:

Para o último encontro do Promat, foi decidido em consenso com os ademais acadêmicos da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática – Estágio Supervisionado II que vamos realizar uma gincana coletiva com os estudantes. As atividades escolhidas forma decididas ter ou não uma ligação com os conteúdos ministrados nas aulas do Promat.

Para isso, primeiramente teremos que agrupar os alunos de acordo com a turma em que estão matriculados. Feita essa etapa, iremos formar de seis a dez grupos menores, de seis a oito membros em cada um, de forma que cada grupo possua alunos das três classes. Para termos um controle da pontuação de cada equipe, vamos nomear cada grupo de acordo com alguma criatura mítica (Na primeira linha da esquerda para a direita: dragão, unicórnio, fada, sereia e fênix, na segunda linha da esquerda para a direita: esfinge, kraken, yeti, vampiro e minotauro) presentes na figura a seguir. Cada membro da equipe receberá um colar com a figura para nos facilitar a identificar os grupos em cada oficina.

Figura 51 – Símbolos das equipes

Fonte: Criação dos estagiários.

Decidimos fazer a dinâmica no espaço da quadra de esportes da Unioeste, e separamos oito atividades iniciais que irão determinar o placar das equipes. Para organizar cada uma das atividades e a separação dos grupos, prevemos que irá durar em torno de quinze minutos. Ainda para ter um controle, iremos planejar uma rota para ser seguida pelos alunos. As dinâmicas estão descritas no quadro a seguir.

Quadro 9 – Atividades e responsáveis

Atividade	**Grupo responsável**
Mirando	Gabriella, Nevir, Ricardo e Thais
Maleta do milhão	Gabriella, Nevir, Ricardo e Thais
Ordem das garrafas	Gabriella, Nevir, Ricardo e Thais
Stop do determinante	Ana, Meirielly, Milena e Stephany
5 casas	Ana, Meirielly, Milena e Stephany

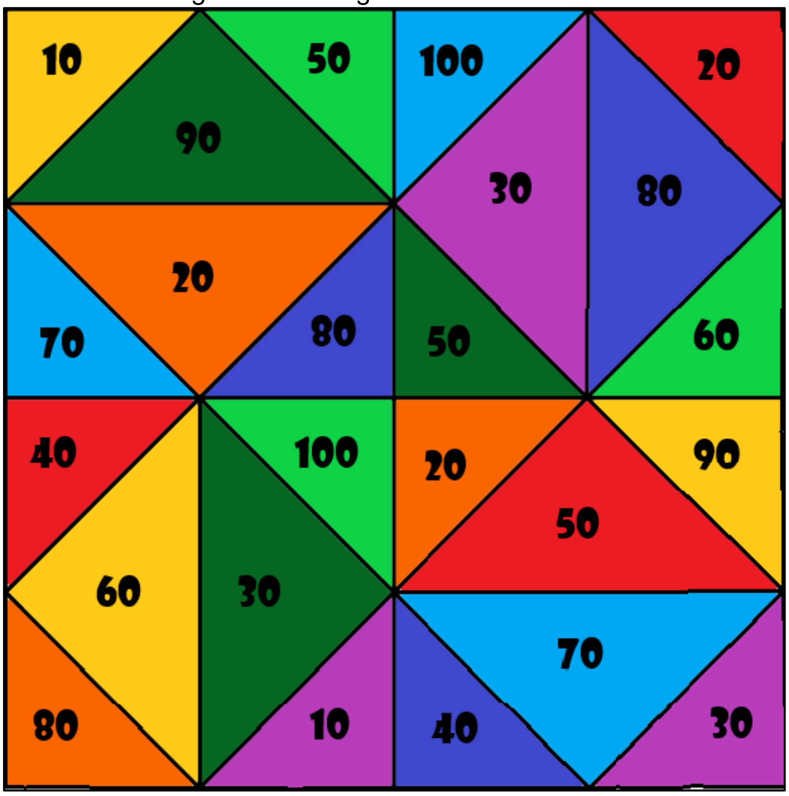
Quadrados mágicos	Ana, Meirielly, Milena e Stephany
Chance de gol	Alexsandro, Giulia e Júlia
Corrida do saco da matemática	Alexsandro, Giulia e Júlia

Fonte: Criação dos estagiários.

Cada atividade possui uma pontuação que uma equipe pode ganhar, sendo variado de um ponto a dez pontos, de acordo com a classificação comparado com as demais. Na sequência estão descritas cada uma das atividades utilizadas na dinâmica.

Mirando

Figura 52 – Imagem ilustrativa do alvo



Fonte: Criação dos estagiários.

O jogo é composto por quatro caixas cortadas e com demarcações de pontuação. O jogo também conta com pecinhas para serem lançadas no alvo e fichas de pontuação dobrada e tripla. O grupo que estiver na atividade vai se organizar em uma fila indiana. Ainda, eles deverão eleger um membro para ser o líder na atividade, onde sua função será escolher antes de responderem se a pergunta terá pontuação normal, dupla ou tripla, usando as fichas que ficarão para ele.

Para poder lançar uma pecinha, o estudante da vez precisa acertar uma pergunta sobre elaborada de geometria, seja plana, espacial ou analítica. Caso erre a resposta, deverá retirar de uma urna um papel com uma das pontuações descritas nas demarcações, e se errar em uma rodada dupla ou tripla, a pontuação descontada também será multiplicada.

A pontuação a ser obtida pela dinâmica irá depender da pontuação total feita pelo grupo. Ao total, serão feitas 20 perguntas de um total de 60 para cada equipe, seguindo a sequência abaixo, com três fichas de duplicação e três fichas de triplicação de pontuação. Eles têm ao total até 15 minutos para finalizar essa atividade.

Perguntas

1) Quantos são os lados do trapézio?

Resposta: Quatro lados.

2) Como são chamados os coeficientes de uma reta?

Resposta: Coeficientes angular e linear

3) Quantas diagonais tem um quadrado?

Resposta: Duas diagonais

4) Quantas faces tem uma esfera?

Resposta: Nenhuma.

5) Quantos graus tem uma circunferência?

Resposta: $360°$.

6) Qual é a medida de um ângulo reto?

Resposta: $90°$.

7) Qual é valor aproximado de π com duas casas decimais?

Resposta: $3{,}14$.

8) Quantas vezes o raio mede o diâmetro da circunferência?

Resposta: Duas vezes.

9) O que é um triângulo equilátero?

Resposta: Um triângulo com todos os lados e ângulos medindo igualmente.

10) Dê exemplos na vida real de duas coisas com formato de esfera?

Respostas pessoais.

11) Qual o nome dos sólidos de revolução?

Resposta: Cone, cilindro e esfera.

12) Cite três tipos de ângulos.

Respostas pessoais.

13) Qual é o perímetro de um triângulo equilátero medindo 22 cm de lado?

Resposta: 66 cm.

14) Qual a altura de um cubo com lado medindo 13 cm?

Resposta: 13 cm.

15) Quantas arestas tem um prisma triangular?

Resposta: Nove arestas.

16) O que é um polígono regular?

Resposta: Um polígono com todos os lados tendo mesma medida.

17) Quantas faces tem um paralelepípedo?

Resposta: Seis faces.

18) Qual o formato da base de um cilindro?

Resposta: Cilindro.

19) Como se chama um ponto de um segmento equidistante das extremidades?

Resposta: Ponto médio do segmento.

20) Quantas arestas tem uma pirâmide triangular?

Resposta: Seis arestas.

21) O são pontos coincidentes?

Resposta: Pontos que estão no mesmo lugar ou que possuem mesmas coordenadas.

22) O que é uma reta secante à uma circunferência?

Resposta: Uma reta que intercepta uma circunferência em dois pontos.

23) Quantos vértices tem um cone?

Resposta: Um vértice.

24) Dê exemplos na vida real de duas coisas com formato de paralelepípedo?

Respostas pessoais.

25) O que são pontos distintos?

Resposta: Pontos que não estão no mesmo lugar ou com coordenadas diferentes.

26) Qual a coordenada da origem do plano cartesiano?

Resposta: $O = (0,0)$

27) Qual a distância entre um ponto da circunferência e o centro dela?

Resposta: É igual a medida do raio.

28) O que são retas concorrentes?

Resposta: São retas que se interceptam em um plano.

29) Como se chama um polígono com seis lados?

Resposta: Hexágono.

30) Dê exemplos na vida real de duas coisas com formato de hexágono?

Respostas pessoais.

31) Qual é o perímetro de um quadrado com lados medindo 5 cm?

Resposta: 20 cm.

32) O que é uma reta externa à uma circunferência?

Resposta: Uma reta que não intercepta a circunferência.

33) Quantos pontos existem em uma reta?

Resposta: Infinitos pontos.

34) Qual a medida de um ângulo raso?

Resposta: $180°$ ou π radianos.

35) O que é um triângulo isósceles?

Resposta: Um triângulo com dois lados de mesma medida.

36) O que são retas paralelas?

Resposta: Retas que não se cruzam em um plano; retas com mesmo coeficiente angular e diferente coeficiente linear.

37) Quantos vértices tem um pentágono?

Resposta: Cinco vértices.

38) Quantos vértices tem uma pirâmide quadrangular?

Resposta: Cinco vértices.

39) O que um segmento mede?

Resposta: A distância entre as extremidades.

40) Quantas retas diferentes existem passando por dois pontos?

Resposta: Uma reta apenas.

41) Quantos lados tem um losango?

Resposta: Quatro lados

42) O que é um ângulo côncavo?

Resposta: Um ângulo maior que $180°$ e menor que $360°$.

43) Qual o perímetro de um retângulo com lados medindo 7 cm e 4 cm?

Resposta: 22 cm.

44) Quantas arestas tem um cilindro?

Resposta: Nenhuma aresta.

45) Dê um exemplo de coordenadas de um ponto pertencente ao primeiro quadrante?

Respostas pessoais.

46) Quantos lados tem um octógono?

Resposta: Oito lados.

47) O que são retas coincidentes?

Resposta: Retas com todos os pontos iguais, ou seja, duas retas iguais.

48) O que diz o Teorema de Pitágoras?

Resposta: Que a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

49) Dê um exemplo de coordenadas de um ponto pertencente ao terceiro quadrante?

Respostas pessoais.

50) Qual a área de um quadrado de lados medindo 9 cm?

Resposta: 81 cm.

51) No plano cartesiano qual é o eixo das ordenadas?

Resposta: Eixo y.

52) Dê exemplos na vida real de duas coisas com formato de cone?

Respostas pessoais.

53) Quantas diagonais tem um triângulo?

Resposta: Nenhuma diagonal.

54) Dê um exemplo de coordenadas de um ponto pertencente ao segundo quadrante?

Respostas pessoais.

55) Quantos pontos existem em um plano?

Resposta: Infinitos pontos.

56) No plano cartesiano qual é o eixo das abcissas?

Resposta: Eixo x.

57) Quantas retas tem em um plano?

Resposta: Infinitas retas.

58) O que é uma reta tangente a uma circunferência?

Resposta: Uma reta que intercepta uma circunferência em um único ponto.

59) Dê um exemplo de coordenadas de um ponto pertencente ao quarto quadrante?

Respostas pessoais.

60) Quais os três tipos de geometria que as perguntas se baseiam?

Resposta: Plana, espacial e analítica.

Maleta do milhão

Serão feitas 40 minis maletas dobráveis de papel vergê e enumeradas, e sendo colocado dentro delas um valor. Iremos pedir para que cada equipe escolha três das maletas para proteger. Essa proteção irá guardar o valor escondido de cada uma, e sendo a soma das três a pontuação da equipe.

Ao longo da dinâmica eles irão retirar de uma urna um papel com uma informação ou uma ação. Dentre as ações eles podem abrir imediatamente uma das suas maletas e ver a pontuação que ganharam, trocar uma das maletas protegidas sem ver suas pontuações, ou escolher aleatoriamente uma das demais maletas para ser aberta e revelar o valor, a descartando de sua escolha.

As informações contidas na urna, são dicas relacionadas ao número da maleta que contém o maior valor, as maletas com os três maiores valores e as maletas com os menores valores. Cada dica por si só pode parecer aberta e confusa, mas eles poderão, conforme o andamento da atividade, juntar as informações e pensar em equipe para tomarem as ações.

Ao final, sobrará as três maletas protegidas, e a soma dos valores que estão nelas é o placar da equipe nessa dinâmica. Vence a equipe que ao final pontuar mais. Tudo isso deve ser feito em até dez minutos. Caso haja empate entre equipes, ambas ganham mesma pontuação, isso é, não há critérios de desempate.

Pontuação das maletas:

1. 150000
2. 15000
3. 900000
4. 75000
5. 10
6. 50000
7. 90000
8. 135000
9. 750000
10. 0
11. 200000
12. 40000
13. 350000
14. 110000
15. 250
16. 600000
17. 5000
18. 500000
19. 20000
20. 1000
21. 100000
22. 400000
23. 7500
24. 2000

25. 500
26. 25000
27. 1000000
28. 60000
29. 95000
30. 50
31. 1500
32. 25000
33. 160000
34. 115000
35. 400
36. 300000
37. 10000
38. 180000
39. 125000
40. 10

Dicas para o maior valor

1. Não estou entre os dez maiores nem os dez menores.
2. Não sou primo.
3. Sou o cubo de um número inteiro.
4. A soma dos meus algarismos é 9.
5. Não sou par.
6. Sou maior que 20.
7. Estou entre 25000 e 60000.

Dicas para os três maiores valores

1. Nossa soma é menor que a quantia de maletas.
2. Um de nós é primo, o restante múltiplo dele.
3. Estamos em uma PG.
4. Pulamos 6 e 18 maletas.
5. Linear, segundo grau, raíz cúbica.
6. Todos somos ímpares.

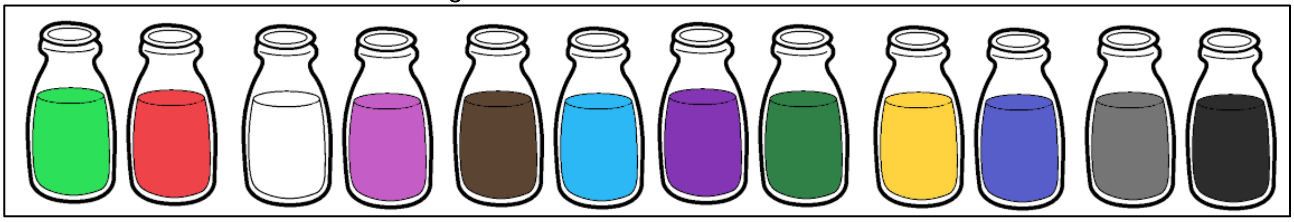
Dicas para os menores valores

1. Você vai selecionar um de nós por sermos redondinhos.
2. Somos oito de mesma distância de um para o outro.
3. Que tabuada fácil.
4. Ímpar e par por favor.
5. Dica importante
6. Múltiplos de um número primo

Ordem das garrafas

O jogo é composto por doze garrafas com líquidos coloridos dispostas em uma fileira para os estudantes moverem suas posições. Em um lugar escondido existem outras doze garrafas (ou impressões) dispostas também em uma fileira ordenada, de modo que, ao comparar com a fileira exposta aos alunos não tenha posições iguais.

Figura 53 – Garrafas coloridas



Fonte: Criação dos estagiários.

O objetivo do jogo é simples, acertar essa ordem por meio de trocas de posições entre as garrafas. O grupo de estudantes estará em uma fila indiana e cada um na sua vez poderá trocar de posição apenas duas garrafas com os acadêmicos avisando quantas estão em lugares corretos. Cabe aos alunos perceberem e realizarem combinações a fim de descobrirem quais garrafas estão no lugar certo.

Vence a prova da gincana o grupo que acertar a ordem com o menor número de trocas possíveis. A atividade tem prazo máximo de dez minutos de duração, e se não estiverem acertando todas as posições serão contados os acertos. Caso haja mais de uma equipe que acerte todas as garrafas, o critério de desempate será o tempo de realização.

Stop do determinante

O grupo receberá uma cartela de modo que, inicialmente, fique virada para baixo. Além disso, será entregue uma folha sulfite ou de caderno para cada aluno do grupo registrar seu raciocínio e cálculos. Para iniciar a dinâmica, os estagiários falarão ''já'' e o grupo deve virar sua cartela e tentar resolvê-la coletivamente. Quando terminar, deve gritar *“stop''* em voz alta. Os estagiários analisarão a resolução do grupo e se estiverem corretas, anotarão o tempo e entregarão outra cartela, repetindo o processo.

Ao fim das rodadas, vence o grupo que tiver resolvido mais cartelas ou, em caso de empate, quem resolveu mais cartelas em menos tempo.

<u>Cartelas:</u>

Cartela 1: $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

Resolução:

Det $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = 4\,.\,5 - (3\,.\,(-2)) = 20 + 6 = 26.$

Cartela 2: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

Resolução:

Det $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} = -22 - (-3) = -22 + 3 = -19.$

Cartela 3: $\begin{pmatrix} -7 & 12 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

Resolução:

Det $\begin{pmatrix} -7 & 12 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = -7\,.\,8 - (3\,.\,12) = -56 - (36) = -92.$

Cartela 4: $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \\ 10 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Resolução:

Det $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \\ 10 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 1\,.\,3\,.\,7 + 9\,.\,8\,.\,10 + 5\,.\,3.\,4 - 10\,.\,7\,.\,5 - 4\,.\,8\,.\,1 - 2\,.\,3\,.\,9 = 358.$

Cartela 5: $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Resolução:

Det $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 4\,.\,6 - (\,2\,.\,1) = 24 - 2 = 22.$

Cartela 6: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Det $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \ 3\,.\,2\,.\,2 + 1\,.\,4\,.\,5 + 7\,.\,2\,.\,4 - 5\,.\,2\,.\,7 - 4\,.\,4\,.\,3 - 2\,.\,2\,.\,1 = -34.$

Cartela 7: $\begin{pmatrix} 16 & 7 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$

Det $\begin{pmatrix} 16 & 7 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} = 16 \,.\, 11 - (4 \,.\, 7) = 176 - 28 = 148.$

Cartela 8: $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Det $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 5 \,.\, 4 \,.\, 3 + 2 \,.\, 2 \,.\, 0 + 2 \,.\, 2 \,.\, 1 - 1 \,.\, 4 \,.\, 0 - 2 \,.\, 2 \,.\, 5 - 2 \,.\, 2 \,.\, 3 = 32.$

Cartela 9: $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Det $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = 8 \,.\, 4 - (5 \,.\, 3) = 32 - 15 = 17.$

Cartela 10: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Det $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \,.\, 4 \,.\, 1 + 2 \,.\, 3 \,.\, 0 + 2 \,.\, 3 \,.\, 1 - 2 \,.\, 4 \,.\, 2 - 1 \,.\, 3 \,.\, 1 - 0 \,.\, 3 \,.\, 1 = -9.$

Problema das cinco casas

Para essa atividade os alunos devem solucionar um problema envolvendo raciocínio lógico. Ao fim das rodadas, vence o grupo que tiver resolvido o problema em menos tempo.

<u>Problema:</u>

Existem cinco casas de cinco cores diferentes. Em cada casa mora uma pessoa de uma diferente nacionalidade. Essas cinco pessoas bebem diferentes bebidas, fumam diferentes marcas de roupa, e têm um certo animal de estimação. Nenhuma delas tem o mesmo animal, fuma o mesmo cigarro ou bebe a mesma bebida.

<u>Pistas:</u>

- O Inglês vive na casa vermelha.
- O Sueco tem cachorros como animais de estimação.
- O dinamarquês bebe chá.

- A casa verde fica à esquerda da casa branca.
- O dono da casa verde bebe café.
- A pessoa que usa *Nike* cria pássaros.
- O dono da casa amarela usa *Adidas*.
- O homem que vive na casa do centro bebe leite.
- O Norueguês vive na primeira casa.
- O homem que usa *Puma* vive ao lado do que tem gatos.
- O homem que cria cavalos vive ao lado do que fuma *Adidas*.
- O homem que usa *Fila* bebe cerveja.
- O Alemão usa *Lacoste*.
- O Norueguês vive ao lado da casa azul.
- O homem que usa *Puma* é vizinho do que bebe água.

Pergunta: Quem tem peixes como animal de estimação?

Resolução:

Quadro 10 – Resolução problema das cinco casas

CASA	AMARELA	AZUL	VERMELHA	VERDE	BRANCA
NACIONALIDADE	Norueguês	Dinamarquês	Inglês	Alemão	Sueco
BEBIDA	Água	Chá	Leite	Café	Cerveja
ROUPA	Adidas	Puma	Nike	Lacoste	Fila
ANIMAL	Gatos	Cavalos	Pássaros	Peixes	Cachorros

Fonte: Elaborado pelos autores

Quadrados mágicos

Um quadrado mágico é uma tabela quadrada com n linhas e n colunas, ela é composta por números e cada linha, coluna e diagonal possui o mesmo valor ao somarem. Além disso, em toda tabela, nenhum número é repetido. Nessa atividade, os alunos devem buscar o posicionamento adequado dos números, seguindo a regra da soma constante em cada linha, coluna e diagonal. Primeiro entregaremos o quadrado mágico com 9 números para ser completado e depois, o quadrado mágico com 16 números.

Ao fim das rodadas, vence o grupo que tiver completado os quadrados mágicos corretamente em menos tempo.

Quadrado 1: Completar com os números do 1 ao 9 (sem repetição) sabendo que a soma de todas as linhas, colunas e diagonais deve ser 15.

Resolução:

Existem algumas respostas para esse tipo de quadrado mágico, porém, os números pares sempre permanecem nas pontas, não podendo estar na mesma linha os números 4 e 6.

Figura 54 – Resolução quadrados mágicos 9 algarismos

2	7	6
9	5	1
4	3	8

6	7	2
1	5	9
8	3	4

4	9	2
3	5	7
8	1	6

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	3	8
9	5	1
2	7	6

8	3	4
1	5	9
6	7	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Fonte: https://www.matematicaefacil.com.br/2017/11/historias-conceitos-quadrado-magico.html

Quadrado 2: Completar com os números do 1 ao 16 (sem repetição), sabendo que a soma de todas as linhas, colunas e diagonais deve ser 34.

Resolução:

Figura 55 – Resolução quadrados mágicos 16 algarismos

34	34	34	34	34	34
34	1	14	15	4	34
34	12	7	6	9	34
34	8	11	10	5	34
34	13	2	3	16	34
34	34	34	34	34	34

Fonte: NOÉ (2022)

Chance de gol

O grupo deverá formar uma fila indiana atrás da bola, que estará a marca que delimita a área da quadra de futsal e cada membro deverá realizar uma cobrança conforme a ordem estabelecida na fila. O goleiro será um dos estagiários e nos casos em que o membro do grupo converter a cobrança, este terá direito a responder uma pergunta, relacionada ao conteúdo de probabilidade (estudado no segundo encontro do Promat). Vencerá e somará mais pontos na atividade a equipe que tiver respondido corretamente mais perguntas ao fim do tempo estabelecido.

Perguntas utilizadas no jogo:

Qual a probabilidade de tirar uma carta vermelha de um baralho comum?

Qual a chance de lançar uma moeda e obter cara?

Qual a probabilidade de escolher um número par de um dado comum de seis faces?

Qual a chance de tirar uma bola azul de uma urna com 5 bolas azuis e 3 bolas vermelhas?

Se lançar dois dados, qual a probabilidade de obter uma soma igual a 7?

Qual a chance de escolher um número ímpar de um conjunto de números de 1 a 10?

Se jogar uma moeda três vezes, qual a probabilidade de obter pelo menos duas caras?

Se escolher aleatoriamente uma carta de baralho, qual a probabilidade de ser um valete?

Qual a chance de tirar uma bola verde de uma urna com 4 bolas verdes, 3 bolas azuis e 5 bolas amarelas?

Se lançar um dado justo, qual a probabilidade de obter um número maior que 4?

Qual a probabilidade de que um casal tenha dois filhos do sexo oposto?

Se escolher aleatoriamente uma carta de um baralho, qual a probabilidade de ser um ás?

Se jogar uma moeda quatro vezes, qual a probabilidade de obter exatamente três coroas?

Qual a chance de tirar uma bola branca de uma urna com 2 bolas brancas, 4 bolas pretas e 3 bolas vermelhas?

Se lançar um dado duas vezes, qual a probabilidade de obter duas vezes o mesmo número?

Qual a probabilidade de tirar uma bola vermelha de uma urna com 2 bolas vermelhas, 3 bolas azuis e 5 bolas verdes?

Se escolher aleatoriamente uma carta de um baralho, qual a probabilidade de ser um rei?

Qual a chance de obter uma carta de ouros em uma única tentativa em um baralho comum?

Se jogar uma moeda duas vezes, qual a probabilidade de obter pelo menos uma coroa?

Qual a probabilidade de escolher um número primo de um dado comum de seis faces?

Se lançar um dado justo, qual a probabilidade de obter um número ímpar?

Qual a chance de tirar uma bola azul de uma urna com 3 bolas azuis, 2 bolas verdes e 4 bolas amarelas?

Se escolher aleatoriamente uma carta de um baralho, qual a probabilidade de ser um diamante ou um coração?

Se jogar uma moeda cinco vezes, qual a probabilidade de obter exatamente duas caras?

Qual a probabilidade de obter uma soma de 10 ao lançar dois dados justos?

Se escolher aleatoriamente uma carta de um baralho, qual a probabilidade de ser uma carta preta?

Se jogar uma moeda três vezes, qual a probabilidade de obter exatamente duas coroas?

Qual a chance de escolher um número par de um conjunto de números de 1 a 20?

Se lançar um dado duas vezes, qual a probabilidade de obter dois números diferentes?

Qual a probabilidade de tirar uma bola amarela de uma urna com 4 bolas amarelas, 3 bolas verdes e 2 bolas pretas?

Corrida do saco da matemática

Cada equipe deverá escolher 2 representantes para realizar a prova. Para esta dinâmica, um dos alunos estará na linha de saída e outro na linha de chegada. A prova começa com o aluno que está na linha de saída indo até o seu colega pulando no saco. Quando se encontrarem, receberão uma questão matemática em que os dois terão de resolver juntos. O aluno que estava esperando na linha de chegada, deverá voltar pulando no saco com a resposta. Caso a resposta esteja errada ele pode voltar, pulando no saco, até seu colega para corrigir a questão. Para voltar com a nova resposta, deve trocar o aluno e o que estava esperando deverá entregá-la aos estagiários. Os alunos podem refazer a questão quantas vezes for necessário desde que sempre alterne o aluno que vai pular no saco. Ganha a equipe que conseguir entregar a resposta correta mais rapidamente, de mesmo modo, se darão o segundo, terceiro e quarto lugar.

Após as atividades, iremos montar a classificação das equipes para formar um chaveamento para a dinâmica final. A atividade escolhida foi a queimada matemática, que está descrita na sequência.

Perguntas utilizadas no jogo:

Quantas maneiras diferentes posso organizar 5 livros em uma prateleira?

De quantas maneiras posso escolher uma equipe de 3 pessoas de um grupo de 8?

Quantas palavras diferentes posso formar usando todas as letras da palavra "CASA"?

De quantas maneiras posso escolher um presidente, um vice-presidente e um secretário de um grupo de 10 pessoas?

Quantos números de 4 algarismos diferentes posso formar usando os algarismos 1, 2, 3 e 4?

De quantas maneiras posso distribuir 10 balas idênticas entre 4 crianças?

Quantos anagramas diferentes posso fazer com a palavra "AMOR"?

De quantas maneiras posso escolher uma equipe de 2 homens e 3 mulheres de um grupo de 5 homens e 4 mulheres?

Quantos números pares de três algarismos diferentes posso formar?

De quantas maneiras posso escolher 4 pratos diferentes de um menu com 10 opções?

Quantos números de 4 algarismos posso formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 sem repeti-los?

De quantas maneiras posso distribuir 7 livros diferentes em 3 prateleiras?

Quantos grupos de 3 letras diferentes posso formar a partir das letras da palavra "BOLA"?

De quantas maneiras posso escolher um comitê de 5 pessoas de um grupo de 12?

Quantas palavras diferentes posso formar usando todas as letras da palavra "FELIZ"?

De quantas maneiras posso distribuir 8 cartas diferentes para 4 pessoas, cada uma recebendo 2 cartas?

Quantos anagramas diferentes posso fazer com a palavra "MATO"?

Quantos números ímpares de quatro algarismos diferentes posso formar?

De quantas maneiras posso escolher 3 presentes diferentes de uma loja que oferece 12 opções?

Quantos grupos de 4 letras diferentes posso formar a partir das letras da palavra "MESA"?

De quantas maneiras posso distribuir 6 balas idênticas entre 4 crianças, permitindo que algumas crianças não recebam nenhuma bala?

Quantos números de 4 algarismos posso formar usando os dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5 sem repeti-los?

De quantas maneiras posso escolher um time de futebol de 11 jogadores de um grupo de 22?

Quantos números de 5 algarismos posso formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 sem repeti-los?

De quantas maneiras posso distribuir 9 bolas idênticas em 3 sacolas?

Quantos anagramas diferentes posso fazer com a palavra "SOL"?

De quantas maneiras posso escolher 2 cursos diferentes de um conjunto de 7 cursos?

Quantas palavras diferentes posso formar usando todas as letras da palavra "BANANA"?

De quantas maneiras posso distribuir 5 livros diferentes para 3 pessoas?

Quantos números pares de três algarismos posso formar usando os dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5 sem repeti-los?

Queimada Matemática

São necessárias duas equipes para jogar uma contra a outra. Essa atividade será feita dentro do espaço da quadra nas mesmas demarcações do campo de futsal. Como uma queimada normal o objetivo é eliminar toda a equipe adversária.

As eliminações são feitas quando um jogador é atingido, encostar ou segurar na bola antes de ela cair no chão. Quando isso ocorrer dizemos que o estudante está queimado, e para não ser retirado do campo ele precisa acertar uma pergunta sem consultar os colegas. Se acertar ele volta ao campo de jogo, caso contrário ele retira o colar da equipe e fica nas demarcações do campo adversário podendo pegar a bola caso ela chegue nele e tentar queimar mais alguém, ou passar para outro colega a bola por meio de um arremesso. Vale ressaltar que em cada jogo apenas uma pergunta será feita para cada jogador queimado, se ele acertar a resposta e for queimado novamente ele está eliminado e vai para a linha do campo adversário.

Ao final, sobrará uma única equipe com membros sem estarem queimados. Assim, os colares de quem foi queimado serão devolvidos para que possam jogar na próxima rodada. A outra equipe estará desclassificada da fase final da gincana.

As questões a serem respondidas podem envolver:

1. Análise combinatória e probabilidade;
2. Matrizes e sistemas de equações;
3. Geometria analítica;
4. Trigonometria;
5. Geometrias plana e espacial;
6. Aritmética.

Dentre algumas outras regras deixaremos claro para os alunos que:

- Não pode acertar no rosto de alguém, caso acertar está eliminado;
- Se segurar a bola configura queimado;
- Pode encostar na bola apenas depois que ela tocar no chão;
- Não sair do campo no momento de um ataque dos adversários, ou será queimado imediatamente.
- Não soprar respostas, podendo haver punições de queimado a eliminado;

- Ter empatia na medição de força contra adversários.

A equipe que vencer o duelo na final é a vencedora da gincana.

Perguntas da queimada

1) O que é matriz quadrada?

Resposta: Uma matriz com mesma quantidade de linhas e colunas.

2) O que são os números Reais?

Resposta: São todos os números Racionais e Irracionais.

3) Qual é o $\cos 45°$?

Resposta: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4) Qual a probabilidade de sair qualquer face de um dado normal?

Resposta: $\frac{1}{6}$.

5) Quantos vértices tem um prisma pentagonal?

Resposta: Dez vértices.

6) Quando que um sistema de equações lineares tem infinitas soluções?

Resposta: Quando qualquer resultado válido para uma das equações satisfaz as demais.

7) Para quê é usada a probabilidade condicional?

Resposta: Para calcular probabilidades dada uma informação a priori.

8) Qual a raiz cúbica de menos um?

Resposta: -1.

9) Qual é o $\cos 0°$?

Resposta: 1.

10) Qual a probabilidade de sortear uma letra do alfabeto e ela ser vogal?

Resposta: $\frac{5}{26}$.

11) Quais são as posições relativas entre circunferências (pelo menos quatro)?

Resposta: Concêntricas, tangentes internamente e externamente, secantes, externas e internas.

12) Qual é o $sen\ 45°$?

Resposta: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13) Quais são os números primos de 1 a 10?

Resposta: $2, 3, 5$ e 7.

14) Qual a probabilidade de sair uma carta vermelha em um baralho de 52 cartas?

Resposta: $\frac{1}{2}$

15) Em qual quadrante do ciclo trigonométrico está o ângulo de $155°$?

Resposta: Segundo quadrante.

16) Qual a soma das probabilidades de um evento?

Resposta: 1 ou 100%.

17) O que é um sistema de equações lineares homogêneo?

Resposta: É um sistema de equações onde cada equação é igualada a zero.

18) Qual é a união dos conjuntos Racionais e Irracionais?

Resposta: O conjunto dos números Reais.

19) Qual é a $\tan 270°$?

Resposta: Não existe.

20) Qual o valor do determinante de uma matriz identidade?

Resposta: 1.

21) Qual o formato das faces laterais de um prisma?

Resposta: Retangulares.

22) Qual a interseção dos conjuntos dos Naturais e Reais?

Resposta: O conjunto dos Naturais.

23) Quanto vale em graus a medida de um arco de $\frac{5\pi}{3}$?

Resposta: $300°$.

24) Qual o formato das faces laterais de uma pirâmide?

Resposta: Triangulares.

25) O que o processo de escalonamento faz no sistema de equações?

Resposta: Facilita cálculos e indica a classificação do sistema.

26) Qual é a $\tan 90°$?

Resposta: Não existe.

27) Dê uma fração que equivale 0.45?

Resposta: $\frac{9}{20}$ ou $\frac{45}{100}$ são as mais prováveis, mas podem aparecer outras.

28) Usando os lados do triângulo retângulo, como definimos a razão cosseno?

Resposta: $\frac{\text{cateto adjacente ao ângulo}}{\text{hipotesnusa}}$.

29) Qual o determinante de uma matriz nula?

Resposta: 0.

30) Qual é o $sen\ 30°$?

Resposta: $\frac{1}{2}$.

31) O que é um anagrama?

Resposta: Uma permutação de letras de uma palavra.

32) Em qual quadrante do ciclo trigonométrico está o ângulo de $265°$?

Resposta: Terceiro quadrante.

33) Qual é o espaço amostral das cores primárias?

Resposta: Vermelho, amarelo e azul.

34) Qual é a $\tan 60°$?

Resposta: $\sqrt{3}$.

35) O que é uma linha poligonal?

Resposta: Uma sucessão de segmentos consecutivos não colineares.

36) O que é matriz coluna?

Resposta: Uma matriz que possui apenas uma única coluna.

37) Qual é a $\tan 225°$?

Resposta: 1.

38) Quais são as posições relativas entre reta e circunferência?

Resposta: Tangente, secante e externa.

39) Quanto vale em radianos a medida de um arco de $270°$?

Resposta: $\frac{3\pi}{2}$.

40) De quantas formas posso me vestir usando dois chapéus e cinco botas?

Resposta: 10 formas.

41) Quais são as posições relativas entre ponto e circunferência?

Resposta: Pertencente, interno e externo.

42) Qual a raiz cúbica de 64?

Resposta: 4.

43) Qual a área de um triângulo com base medindo 11 cm e altura 6 cm?

Resposta: 33 cm².

44) Qual é a equação da Relação Fundamental Trigonométrica?

Resposta: $\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

45) O que são os números Inteiros?

Resposta: Números negativos e positivos sem casas decimais e o zero.

46) Qual é o $\cos 180°$?

Resposta: -1.

47) O que é matriz linha?

Resposta: Uma matriz que possui apenas uma linha.

48) Quanto vale em graus a medida de um arco de $\frac{\pi}{6}$?

Resposta: $30°$.

49) Qual operação é oposta da multiplicação?

Resposta: Divisão.

50) Qual é a interseção dos conjuntos Racionais e Irracionais?

Resposta: O conjunto dos números Irracionais.

51) O que são os números Racionais?

Resposta: Os números que podem ser representados por fações e as dizimas periódicas.

52) Qual é o $\cos 60°$?

Resposta: $\frac{1}{2}$.

53) Qual é o cubo de 100?

Resposta: 1000000

54) O que é matriz nula?

Resposta: Uma matriz que só possui zeros em seus elementos.

55) Em qual quadrante do ciclo trigonométrico está o ângulo de $1°$?

Resposta: No primeiro quadrante.

56) Qual a fórmula do volume de um prisma?

Resposta: $\text{Base} \times \text{altura}$.

57) O que faz a operação de módulo?

Resposta: Conserva os sinais positivos e o zero e faz com que valores negativos sejam positivos.

58) O que é espaço amostral?

Resposta: Todas as opções possíveis de ocorrer um evento.

59) Qual é o $sen\ 0°$?

Resposta: 0.

60) O que é matriz identidade?

Resposta: Uma matriz com a diagonal principal tendo todos os seus elementos iguais a um e os demais sendo iguais a zero.

61) Qual a medida do comprimento de uma circunferência?

Resposta: $2\pi r$.

62) Quanto vale em radianos a medida de um arco de $0°$?

Resposta: 0 radianos.

63) Qual a relação de sistemas e matrizes?

Resposta: Todo sistema pode ser representado por uma matriz, e vice-versa.

64) Quantos números tem entre dois e oito?

Resposta: Infinitos números.

65) Qual o volume de um cubo de lados medindo 5 cm?

Resposta: 125 cm³.

66) Qual é o $\cos 30°$?

Resposta: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

67) Qual o nome da parte de baixo de uma fração?

Resposta: Denominador.

68) Qual é a soma dos ângulos internos de um losango?

Resposta: $360°$.

69) Qual é a $\tan 45°$?

Resposta: 1.

70) Qual é a equação reduzida da reta?

Resposta: $y = ax + b$.

71) Qual formato tende um polígono regular se o número de lados for cada vez maior?

Resposta: Um círculo.

72) Qual o volume da pirâmide que tem área da base medindo 1 cm e altura medindo 1 cm?

Resposta: 1.

73) Qual é a $\tan 30°$?

Resposta: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

74) Qual a posição de duas retas que se interceptam dividindo igualmente o plano?

Resposta: Perpendiculares.

75) Em qual quadrante do ciclo trigonométrico está o ângulo de $342°$?

Resposta: Quarto quadrante.

76) O que é uma equação?

Resposta: Uma sentença de igualdade com incógnitas e termos independentes.

77) O que são os números Irracionais?

Resposta: Números que não podem ser representados por frações ou dízimas periódicas.

78) Qual é o $\cos 120°$?

Resposta: $\frac{1}{2}$.

79) Com quantos pontos não colineares podemos definir um plano?

Resposta: Três pontos não colineares.

80) Quando que um sistema de equações lineares possui solução única?

Resposta: Quando os gráficos se cruzam em único ponto.

81) Qual a probabilidade de acertar no chute uma questão de verdadeiro ou falso?

Resposta: 50%ou $\frac{1}{2}$.

82) Qual o volume de um cilindro com base de raio medindo 1 cm e altura 1 cm?

Resposta: π cm³.

83) Qual é o $sen\ 180°$?

Resposta: 0.

84) Como é chamado um polígono com nove lados?

Resposta: Eneágono.

85) O que são os números Naturais?

Resposta: Números sem casas decimais e positivos.

86) O que é união de conjuntos?

Resposta: Uma operação que seleciona todos os elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos envolvidos.

87) Usando os lados do triângulo retângulo, como definimos a razão seno?

Resposta: $\frac{\text{cateto oposto ao ângulo}}{\text{hipotesnusa}}$.

88) Quando que um sistema de equações lineares não tem solução?

Resposta: Quando existe uma igualdade impossível.

89) Quantos anagramas tem o nome “ANA”?

Resposta: Três anagramas.

90) O que diferencia variável e incógnita?

Resposta: Incógnita é um valor oculto fixo a ser procurado, incógnita é uma medida que podemos alterar.

91) Qual é o $sen\ 270°$?

Resposta: -1.

92) Qual é o valor de $1!$?

Resposta: 1.

93) O que são os números primos?

Resposta: Números que são divisíveis apenas por um e si mesmos dentro do conjunto dos naturais.

94) O que é interseção de conjuntos?

Resposta: Uma operação que seleciona todos os elementos em comum dos conjuntos envolvidos.

95) Qual é o $sen\ 60°$?

Resposta: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

96) Qual a medida do raio de uma circunferência se o diâmetro mede 0.18 m?

Resposta: 0.09 cm.

97) O que é uma potência?

Resposta: Uma operação que realiza a multiplicação de um elemento por si em n vezes.

98) O que é um evento impossível?

Resposta: Um evento que não tem como ocorrer, de probabilidade 0.

99) Usando os lados do triângulo retângulo, como definimos a razão tangente?

Resposta: $\frac{\text{cateto oposto ao ângulo}}{\text{cateto adjacente ao ângulo}}$.

100) Qual a união dos conjuntos dos Inteiros e Naturais?

Resposta: O conjunto dos números Inteiros.

Avaliação: Faremos a avaliação se baseando no empenho de cada participante com suas estratégias, seja em momentos individuais ou coletivos. Também avaliaremos cada grupo da gincana, seja no empenho em cada dinâmica, como também na sua classificação final.

Referências:

NOÉ, Marcos. Solucionando Quadrados Mágicos. **Canal do Educador**, 2022. Disponível em: https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/solucionando-quadrados-magicos.htm. Acesso em: 03 maio 2023.

TODÃO, Jefferson. Histórias e conceitos do Quadrado Mágico. **Matemática é fácil**. Disponível em: https://www.matematicaefacil.com.br/2017/11/historias-conceitos-quadrado-magico.html. Acesso em: 05 maio 2024.

13.2 **Relatório**

Relatório – 11/05/2024

Iniciamos o décimo encontro às 8h10 realizando a chamada na sala A217 e constatamos que 21 alunos estavam presentes. Na sequência, demos algumas instruções sobre como funcionaria a aula e direcionamos a turma para a quadra da Unioeste. Um dos alunos perguntou se a aula seria apenas de dinâmicas e nos comunicou que não estava se sentindo bem, pois estava gripado.

O encontro que marcou o encerramento do Promat foi planejado e realizado em conjunto com os três grupos de estagiários. Dessa forma, organizamos sete atividades diferentes para serem realizadas em um circuito.

Após todos as turmas adentrarem ao local, dividimos os alunos em 7 equipes nomeadas: unicórnio, yeti, sereia, esfinge, fada, dragão e fênix. Cada uma das equipes foi encaminhada a uma atividade diferente e dispunha de 12 minutos para realizá-la. Ao final do tempo, as equipes trocavam de atividade até que tivessem participado de todas as dinâmicas.

As atividades foram organizadas para que os alunos interagissem entre si e pudessem trabalhar a matemática de uma forma diferente, eram elas: mirando, maleta do milhão, ordem das garrafas, chance ao gol, problema das cinco casas, *stop* do determinante e quadrados mágicos. Nosso grupo de estagiárias ficou responsável pelas três últimas atividades citadas. Antes da primeira rodada, o aluno que não estava se sentindo bem pediu para que ligássemos para sua mãe para buscá-lo. Logo depois, ele foi embora.

Durante as rodadas foi possível perceber que os alunos tiveram muito envolvimento nas atividades, mas as equipes eram muito diferentes. No *stop* do determinante, por exemplo, algumas equipes (duas especificamente) tiveram mais facilidade nos cálculos e conseguiram resolver todas as dez cartelas nos 12 minutos.

Entretanto, outros grupos não lembravam dos métodos de resolução e acertaram apenas uma ou duas cartelas no mesmo tempo.

No problema das cinco casas isso também foi reforçado, havia grupos acertavam poucas posições e outros mais, porém não de forma tão discrepante. Além disso, apenas um grupo conseguiu organizar todas as informações e responder a pergunta solicitada. Já na atividade dos quadrados mágicos, os grupos tiveram um comportamento parecido entre si, apenas divergindo no tempo de resolução. Explicando melhor, todos os grupos conseguiram solucionar o quadrado mágico de 9 algarismos e nenhum deles conseguiu solucionar o quadrado mágico com 16 algarismos, que possuía dificuldade elevada.

Apesar das singularidades, foi possível observar claramente os alunos unindo suas aptidões e se ajudando a fim de conquistar a melhor pontuação. Outro ponto que merece destaque é que as vezes uma equipe não ia muito bem em determinada atividade, mas vencia com facilidade outra. Daí, a importância de trabalhar vários tipos de habilidades matemáticas no circuito.

Após a realização das sete atividades planejadas, cada equipe recebeu uma pontuação conforme seu desempenho no circuito. A equipe dragão obteve a maior pontuação e venceu a competição.

Posteriormente, todos se dirigiram até o Laboratório de Ensino da Matemática (LEM) e participaram de uma confraternização pelo encerramento das aulas do Promat. Nesse momento, servimos um lanche especial e houve uma socialização entre alunos, estagiários e orientadores.

Observando o andamento da gincana, percebemos que os alunos se mostraram muito participativos e dispostos a realizar cada uma das dinâmicas propostas. A maior parte dos alunos estava empenhada em responder corretamente as perguntas, pontuar e vencer os adversários. Os alunos também se divertiram muito entre si e jogaram vôlei ao fim do circuito. O mais interessante de tudo, no entanto, foi perceber a união e trabalho em grupo das equipes, de forma que todos puderam contribuir e não deixaram de participar, apesar das dificuldades.

14. **Considerações finais**

O Estágio Supervisionado II proporcionou experiências únicas e enriquecedoras, especialmente através do Promat, onde tivemos a oportunidade de aplicar nossos conhecimentos e colaborar com a comunidade externa por meio deste projeto.

Este foi um período desafiador que nos levou a experimentar novas metodologias de ensino, crucial para a ampliação de nossos conhecimentos. Isso nos permitiu enfrentar desafios e proporcionar aos alunos diversas oportunidades de aprendizagem.

No Promat, conseguimos relacionar teoria e prática com mais confiança, graças à orientação de professores experientes que nos acompanharam em todos os encontros. Durante este período, conseguimos não apenas aplicar conceitos teóricos aprendidos ao longo do curso, mas também desenvolver habilidades práticas indispensáveis para a docência em matemática.

Por fim, reconhecemos que o Estágio Supervisionado II foi uma etapa fundamental para nossa formação. As experiências acumuladas e as habilidades desenvolvidas ao longo deste período serão fundamentais para nossa futura atuação profissional, garantindo que sejamos professores mais preparados e comprometidos com a qualidade da educação.

15. **Referências**

CRUZ, André Luiz Zanin da; SOTEL, Cleison Ribeiro; PINHEIRO, William Felipe. Promat 2023. **Matemática - Unioeste - Campus de Cascavel**, 2023. Disponível em: https://dmat-unioeste.mat.br/files/estagios/Promat2023-Andre,%20Cleison%20e%20William.pdf. Acesso em: 23 mai. 2024.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ. Projeto Político Pedagógico do curso de Matemática. **Matemática - Unioeste - Campus de Cascavel**, 8 dez. 2016. Disponível em: https://dmat-unioeste.mat.br/index.php/grad/projeto-politico-pedagogico-2. Acesso em: 22 maio